Probabilités discrètes

CHAPITRE 1

-

ESPACES PROBABILISES DISCRETS

Sommaire

Références

1. Bogaert P. (2006). *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs*. Ed. De Boeck.
2. Ross S.M. (1994). *Initiation aux probabilités*. Ed. Presses polytechniques et universitaires romandes
3. Saporta G. (1990). *Probabilités, Analyse des données et Statistique*. Ed. Technip.
4. http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/probamass_html/node2.html

1. Probabilités

1.1. Vocabulaire

Une *expérience* est qualifiée *d'aléatoire* si on ne peut prévoir par avance son résultat et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner lieu à des résultats différents. La théorie des probabilités sert à modéliser de telles situations.

On représente le résultat (ou la réalisation) de cette expérience comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles : Ω est appelé *l'ensemble fondamental* ou encore *l'univers des possibles*.

Exemple : Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés. Alors l'univers est défini par les 21 éléments,

$$\Omega=\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}.$$

Remarque : Il convient de noter ici que l'ensemble Ω n'est pas déduit de manière unique de l'expérience mais dépend de l'usage qui doit être fait des résultats. Ainsi, si l'on convient une fois pour toute qu'on ne retiendra de l'expérience des deux dés que la somme des points affichés, on peut très bien se contenter d'un ensemble $\Omega=\{2,3,\ldots,12\}$.

Un *événement* est une assertion ou une proposition logique relative au résultat de l'expérience. On dira qu'un événement est *réalisé* ou non suivant que la proposition est vraie ou fausse une fois l'expérience accomplie. A la réalisation d'un événement on peut donc associer tous les résultats de l'épreuve correspondante. Un événement est donc un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple (suite) : Considérons l'événement « la somme des points est supérieure à 10 ». On peut lui associer les résultats $\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$, c'est-à-dire une partie de l'ensemble fondamental Ω pour laquelle cet événement est réalisé.

1.2. Algèbre des évènements

Notons $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble d'événements. Nous allons définir les propriétés nécessaires à $\mathcal{A}$ en nous référant à des besoins usuels.

Hypothèse 1

A tout événement A, on associe son *événement contraire* noté $\overline{A}$ tel que si A est réalisé alors $\overline{A}$ ne l'est pas, et réciproquement. $\overline{A}$ est donc représenté dans Ω par la partie complémentaire de A.

$\Rightarrow$ Il sera donc naturel d'exiger de $\mathcal{A}$ la propriété suivante : $A\in\mathcal{A} \Rightarrow \overline{A}\in\mathcal{A}$.

<u>Exemple</u> (suite) : Par exemple si A est l'événement la somme des dés est supérieure ou égale à 10, alors $\overline{A}$ est l'événement la somme des dés est inférieure strictement à 10.

Hypothèse 2

Etant donnée deux événements A et B, on est conduit à s'intéresser à leur *union « A ou B »*, *i.e* $A \cup B$, qui prendra la valeur vraie si l'un des deux événements se réalise, et à leur *intersection « A et B »*, *i.e* $A \cap B$, qui prendra la valeur vraie si les deux événements se réalisent simultanément.

$\Rightarrow$ Il faut donc que si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$, et ceci d'une manière générale pour un nombre quelconque d'événements.

<u>Exemple</u> (suite) : Par exemple, si l'événement A est la somme des dés est supérieure ou égale à 10 et l'événement B est obtenir au moins un 6, alors

$A \cup B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$ et $A \cap B = \{(4,6),(5,6),(6,6)\}$.

Hypothèse 3

On définit également *l'événement certain* représenté par Ω tout entier, et l'*événement impossible* représenté par l'ensemble vide $\varnothing$.

$\Rightarrow$ Il faut donc que ces deux événements appartiennent à $\mathcal{A}$.

<u>Exemple</u> (suite) : Par exemple la somme des dés est supérieure à 13 correspond à l'événement impossible $\varnothing$.

A partir de ces trois hypothèses, nous pouvons maintenant définir la classe $\mathcal{A}$ par les trois axiomes suivants.

<u>Définition</u>

On dit que $\mathcal{A}$ est une *σ-algèbre de Boole* ou une *tribu* si

i) $\forall A \in \mathcal{A},\ \overline{A} \in \mathcal{A}$

ii) $\forall (A_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{A},\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

iii) $\Omega \in \mathcal{A}$

<u>Remarques</u>:

- Les propriétés précédentes impliquent que $\varnothing \in \mathcal{A}$ et $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu particulière (la plus grosse) mais il n'est pas toujours utile ni souhaitable de l'utiliser.

On peut maintenant donner la définition d'un espace probabilisable.

<u>Définition</u>

On appelle *espace probabilisable* le couple $(\Omega;\mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ constitue une tribu de parties de Ω.

Donnons encore quelques définitions utiles.

Définition

Soient deux événements A et B, on dit que ces événements sont *incompatibles* ou *mutuellement exclusifs*, si la réalisation de l'un exclut celle de l'autre, autrement dit si $A \cap B = \emptyset$.

Définition

Un ensemble d'événements $A_1, \dots, A_n$ forme un *système complet d'événements* si les parties $A_1, \dots, A_n$ de Ω constitue une partition de Ω :

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Remarque : Un système complet trivial est défini par un événement et son contraire.

Définition

On appelle *événement élémentaire* une partie de Ω réduite à un seul événement. On les note en général $\{\omega\}$. Les événements élémentaires forment une partition de Ω. De plus tout événement $A \in \Omega$ peut s'écrire comme la réunion d'événements élémentaires : $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$.

1.3. Espace probabilisé

1.3.1. Loi de probabilité

A chaque événement on associe un nombre positif compris entre 0 et 1, sa probabilité. Afin d'éviter toute discussion de nature philosophique, la théorie moderne des probabilités repose sur l'axiome suivant.

Définition

On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (ou loi de probabilité) une application P de $\mathcal{A}$ dans [0,1] telle que

i) $P(\Omega)=1$

ii) Pour tout ensemble dénombrable d'événements incompatibles $A_1, \dots, A_n$, on a $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Attention !! : on a toujours $0 \leq P(A) \leq 1$.

Définition

On appelle *espace probabilisé* le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1.3.2. Propriétés élémentaires

De la définition de la probabilité, on déduit immédiatement les propriétés suivantes.

<u>Propriétés</u>

$P(\emptyset)=0$ $P(\overline{A})=1-P(A)$

$P(A)\leq P(B)$ si $A\subset B$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

<u>Remarque</u> : la propriété sur l'union n'est vraie que pour l'union de deux évènements. Dans le cas général nous avons l'inégalité de Boole,

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

<u>Propriété</u> (théorème des probabilités totales)
Soit $(B_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'événements, alors pour tout événement A, on a

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap B_i)$$

1.3.3. Evénements négligeables

$P(A)=0$ n'implique pas nécessairement que $A=\emptyset$. Un événement peut être de probabilité nulle sans être impossible. De même $P(A)=1$ n'implique pas que A soit un événement certain.

<u>Définition</u>
Un évènement $A\in\mathcal{A}$ est dit *négligeable* s'il vérifie

$$P(A)=0$$

<u>Propriété</u>
Tout union finie ou dénombrable d'évènements négligeables est négligeable.

<u>Exemple</u> : On choisit au hasard un nombre entier. Pour modéliser cette expérience, nous prenons $\Omega=\mathbb{N}$. Si on considère que chaque nombre entier a la même probabilité d'être choisi alors la probabilité P de choisir un nombre en particulier est nulle, or il n'est pas impossible de choisir ce nombre.

1.4. Construction d'un espace de probabilité dans le cas discret

<u>Théorème</u>
Soient Ω un espace-échantillon discret, $\mathcal{A}$ une tribu et $P : \mathcal{A}\to\mathbb{R}^+$ une mesure de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ alors on a les propriétés suivantes :

i) $\omega\in\Omega$, $P(\{\omega\})\geq 0$ et $\sum_{\omega\in\Omega}P(\{\omega\})=1$

ii) $P(\emptyset)=0$

iii) $\forall A\in\mathcal{A},\ P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\{\omega\})$

Remarque : Pour construire un espace probabilisé, on procède de la façon suivante :

1. On exprime l'espace échantillon Ω sous la forme d'évènements élémentaires : $\Omega = \bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}$.
2. On se donne une mesure de probabilité P vérifiant (*i*) et (*ii*) du théorème.
3. Pour calculer la probabilité d'un évènement $A\in\mathcal{A}$, on le décompose en événements élémentaires puis on applique (*iii*).

2. Modèle uniforme

2.1. Modèle uniforme

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé discret avec Ω fini. On parle de mesure de probabilité uniforme si les événements élémentaires $\omega\in\Omega$ ont la même chance de se réalisés, c'est-à-dire pour $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$

$$\exists k\in[0,1],\ \forall i\in\{1,\ldots,n\},\ P(\{\omega_i\})=k.$$

Remarque : Pour déterminer k, il suffit de résoudre l'équation $P(\Omega)=1$

$$\Leftrightarrow \sum_{\omega\in\Omega}P(\{\omega\})=1 \Leftrightarrow \sum_{\omega\in\Omega}k=1 \Leftrightarrow k\times\mathrm{card}(\Omega)=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Exemple : On considère le lancer d'un dé. On a $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Le dé n'étant pas pipé, toutes les faces ont la même chance k de sortir, d'où

$$P(\Omega)=\sum_{i=1}^{6}k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{6}.$$

Propriété
Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé avec P mesure de probabilité uniforme, alors

$$\forall A\in\mathcal{A},\ P(A)=\frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

Exemple (suite) : Soit A l'évènement « obtenir une face paire », alors card(A)=3, d'où P(A)=3/6=0,5.

Rappel sur le cardinal

4.1. p-listes

Soient $\Omega_1,\ldots,\Omega_p$ des espaces échantillon et $\Omega=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_p$ le produit cartésien des ces espaces. Les éléments de Ω sont appelés des p-uplets : $x\in\Omega \Leftrightarrow x=(x_1,\ldots,x_p)$ où $x_i\in\Omega_i$. On rappelle que

$$\mathrm{card}(\Omega)=\prod_{i=1}^{p}\mathrm{card}(\Omega_i).$$

Une *p-liste* de n éléments est en fait un p-uplet où chaque composante peut prendre n valeurs :

$$(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_1\times\ldots\times\Omega_p \text{ avec } \mathrm{card}(\Omega_i)=n,\ \forall i\in\{1,..,p\}.$$

Cela correspond à un tirage ordonné avec remise de p éléments parmi n.

$$\mathrm{card}(\text{p-liste de n éléments})=n^p.$$

Exemple : On lance un dé trois fois de suite. La probabilité d'obtenir trois fois le même nombre est 1/36.

Un *arrangement* est un p-uplet où chaque composante peut prendre n valeurs distinctes :

$$(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_1\times\ldots\times\Omega_p \text{ avec } \mathrm{card}(\Omega_i)=n \text{ et } x_i\neq x_j.$$

Cela correspond à un tirage ordonné sans remise de p éléments parmi n.

$$\mathrm{card}(\text{arrangements})=A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exemple : Un cadenas fonctionne avec quatre chiffres. La probabilité qu'un code soit composé de quatre chiffres différents est 0,504.

Cas particulier

Si p=n, c'est-à-dire un arrangement de n éléments parmi, alors on parle de *permutation* et on a

$$\mathrm{card}(\text{permutations})=n\,!$$

Exemple : Le nombre de façons de rendre les copies à *n* élèves est *n* !

2.2. Combinaisons

Une combinaison sans répétition (ou tout simplement combinaison) est une disposition non ordonnée et sans répétition de p éléments parmi n. Cela correspond à un tirage simultané de p éléments parmi n.

$$\mathrm{card}(\text{combinaisons})=C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}$$

Exemple : Un joueur de bridge reçoit 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. La probabilité de recevoir 4 as est $2{,}6\times10^{-3}$.

Une combinaison avec répétition correspond à la disposition non ordonnée avec répétition de p éléments parmi n.

$$\mathrm{card}(\text{combinaisons avec répétition})=C_{n+p-1}^p.$$

Tirage	Avec ordre	Sans ordre
Sans remise	A_n^p	$C_n^p = \binom{n}{p}$
Avec remise	n^p	C_{n+p-1}^p

Tableau récapitulatif du tirage de p éléments parmi n

3. Probabilités conditionnelles

3.1. Définition et propriétés

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(B)>0$.

Définition

La probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B s'est déjà réalisé s'appelle la *probabilité conditionnelle de A sachant B* et est définie par

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

L'espace de probabilité conditionnelle par rapport à B est défini par $(\Omega,\mathcal{A},P_B)$, où

$$\forall A\in \mathcal{A},\ P_B(A)=P(A|B).$$

Remarque : P_B est une mesure de probabilité sur Ω. En particulier, $P_B(\Omega)=1$.

Exemple : Soit une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne. On note A={la deuxième boule est rouge}. Alors de façon intuitive on a :

Si au premier tirage la boule est rouge $P_1(A)=2/4=1/2$

Si au premier tirage la boule est bleue $P_2(A)=3/4$

Si maintenant on formalise le problème avec des probabilités conditionnelles, on pose Ω={tirages ordonnés sans remise de 2 boules parmi 5}. On a $\mathrm{card}\Omega=A_5^2=20$.

Si B={La première boule est rouge}, alors $\mathrm{card}B=3\times4$, $\mathrm{card}(A\cap B)=2\times3$, d'où $P(A|B)=6/12=1/2$.

Si B={La première boule est bleue}, alors $\mathrm{card}B=2\times4$, $\mathrm{card}(A\cap B)=2\times3$, d'où $P(A|B)=6/8=3/4$.

Propriétés

- Si $B\subset A$, $P(A|B)=1$
- $P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)$
- Si $P(B)\neq0$ et $P(B)\neq1$, alors $P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})$

3.2. Formule de Bayes

Propriété

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et $\{B_i\}_{i=1,\dots n}$ une partition de Ω telle que $P(B_i)\neq 0$, $\forall i=1,\dots,n$, alors

$$\forall A\in\mathcal{A},\ P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\times P(B_i).$$

Théorème (formule de Bayes)

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et $\{B_i\}_{i=1,\dots n}$ une partition de Ω telle que $P(B_i)\neq 0$, $\forall i=1,\dots,n$, alors

$$\forall A\in\mathcal{A},\ P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)\times P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)\times P(B_j)}.$$

3.3. Indépendance

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$. On dit que A et B sont *indépendants* ou *stochastiquement indépendants* si

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B).$$

A contrario, si $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$, on dit que A et B dont *dépendants* ou *liés*.

Remarque

Si les événements A et B sont indépendants alors $P(A|B)=P(A)$ et $P(B|A)=P(B)$.

Exemple

On lance une pièce de monnaie trois fois, alors $\Omega=\{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P),(P,F,F),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)\}$. On considère les trois événements suivants,

A={avoir pile sur les deux premiers lancers}
B={Avoir pile au troisième lancer}
C={avoir au moins deux piles}

Intuitivement, on sent que les événements A et B sont indépendants entre eux mais qu'ils sont liés à l'événement C.

Nous avons équiprobabilité. $\text{Card}\Omega=2^3$, d'où $P(A)=2/8$, $P(B)=4/8$ et $P(C)=4/8$.

$P(A\cap B)=1/8=P(A)\times P(B)$ donc A et B sont indépendants
$P(A\cap C)=1/4\neq P(A)\times P(C)$ donc A et C sont liés
$P(B\cap C)=3/8\neq P(B)\times P(C)$ donc B et C sont liés

Propriétés

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements indépendants de $\mathcal{A}$. Alors

A et $\overline{B}$ sont indépendants
$\overline{A}$ et B sont indépendants
$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i=1,\ldots n}$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$.

Définition

On dit que les événements de la famille sont *deux à deux indépendants* si

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\},\ \forall j\in\{1,\ldots,n\}\ i\neq j,\ P(A_i\cap A_j)=P(A_i)\times P(A_j).$$

On dit que les événements de la famille sont *mutuellement indépendants* si

$$P(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} A_i)=\prod_{i\in\{1,\ldots,n\}} P(A_i).$$

Remarque

L'indépendance mutuelle entraîne d'indépendances deux à deux mais la réciproque est fausse.