T.D. n°1

Mesure de probabilité – Combinatoire – Probabilités conditionnelles

ESPACE ECHANTILLON, EVENEMENTS ET PROBABILITES

Exercice 1

1) On lance simultanément une pièce de monnaie et un dé et on observe les faces supérieures présentées après le lancer. En désignant les faces de la pièce par P (pile) et F (face) et celles du dé par 1, 2, ..., 6, déterminer l'espace échantillon associé à cette expérience.
2) Même question que précédemment pour l'expérience : On lance un dé jusqu'à ce que l'on obtienne 6 pour la troisième fois et on observe le nombre de lancers nécessaires pour atteindre ce but.
3) Même question que précédemment pour l'expérience : Pendant une période de temps donnée, on compte le nombre d'automobilistes traversant le poste de péage d'un pont.

Exercice 2

On lance simultanément deux dés et on observe le nombre de points sur le face supérieure de chaque dé. Représenter les événements suivants par un sous-ensemble de l'espace échantillon.

1) Le nombre de points sur chaque face est supérieur ou égal à 3.
2) Le nombre total de points est 8.
3) Le nombre total de points est supérieur ou égal à 9.
4) Sur chaque face, il y a un nombre pair de points.
5) Sur l'une des faces, il y a un nombre pair de points et sur l'autre il y a plus de 5 points.

Exercice 3

En utilisant les opérations de réunion, d'intersection et de complémentaire, représenter les événements suivants.

1) Au moins un des événements A, B se réalise.
2) Les événements A, B se réalisent.
3) Exactement un des événements A, B se réalise.
4) Aucun des événements A, B se réalise.
5) Au moins un des événements A, B, C se réalise.
6) Au moins deux des événements A, B, C se réalisent.
7) Exactement un des événements A, B, C ne se réalise pas.
8) Exactement un des événements A, B, C se réalise.
9) A ne se réalise pas mais au moins un des événements B, C se réalise.
10) Les événements A, B, C se réalisent.

Exercice 4

Pour un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tel que

$P[A]=0,3 \qquad P[B]=0,2 \qquad P[A\cap B]=0,1$

Déterminer les probabilités des événements suivants.

1) Au moins un des événements A, B se réalise.
2) Aucun des événements A, B ne se réalise.
3) A ne se réalise pas mais B se réalise.
4) Exactement un des événements A, B se réalise.

Exercice 5

Pour un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tel que

$P[A]=0,5 \qquad P[B]=0,1 \qquad P[C]=0,3$

Déterminer la valeur exacte ou un encadrement des probabilités des événements suivants.

1) $P[\overline{B}]$ 2) $P[B\cup C]$ 3) $P[\overline{A}\cup\overline{B}]$
4) $P[B\cap C]+P[\overline{B}\cap C]$ 5) $P[A\cap\overline{B}]$

Exercice 6

On considère une loterie qui consiste à choisir un chiffre au hasard tel que la probabilité d'un chiffre $k\in\{0,\ldots,9\}$ est donnée par $(k+1)p$.

1) Déterminer $p\in]0,1[$.
2) Quelle est la probabilité d'avoir un nombre plus grand ou égal à 2 ?

Exercice 7

Chez les marsupilami, la probabilité d'avoir k enfants est définie par αp^k où $p\in]0,1[$.

1) Déterminer la constante α.
2) Calculer la probabilité d'avoir moins de 3 enfants.

MODELE UNIFORME

Exercice 8

Dans les vestiaires d'un club sportif, quatre personnes ont mélangé leurs chaussures. Si on prend deux chaussures au hasard, calculer les probabilités suivantes.

1) les deux chaussures forment une paire ?
2) les deux chaussures soient deux pieds droits ?
3) les deux chaussures appartiennent à deux personnes différentes ?

Exercice 9

On veut photographier un groupe de 5 personnes. De combien de façons distinctes peut-on les placer les unes à côté des autres ?

Exercice 10

Neuf personnes sont convoquées par le CROUS pour la visite médicale. Deux médecins les reçoivent. Le premier verra 5 personnes, le second 4.

1) De combien de façons différentes les neuf personnes peuvent-elles être réparties entre chaque médecin ?
2) Il y a 4 personnes portant des lunettes. De combien de façons différentes peut-on réaliser cette répartition, sachant que chaque médecin verra 2 personnes portant des lunettes ?
3) De plus, on veut que Toto qui porte des lunettes et Titi qui n'en porte pas, soient examinés par le même médecin. Combien de répartitions sont possibles ?

Exercice 11

Les 135 élèves d'une promotion sont convoqués à un examen dans un amphi dont les places sont numérotées de 1 à 300. L'administration attribue une place au hasard à chaque étudiant.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2) Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne soit placé au-delà de la place 200 ?
3) Pour éviter les tricheries, on décide de les placer sur les numéros pairs en intercalant une autre section sur les places impaires. Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne soit placé au-delà de la place 280 ?

Exercice 12

Une classe de 12 filles et 18 garçons doit élire un comité de deux délégués.

1) Combien de comités peut-on constituer?
2) Quelle est la probabilité que l'élève X fasse partie du comité ?
3) Quelle est la probabilité que qu'un seul sexe soit représenté dans le comité ?

Exercice 13

Quelle est la probabilité deux personnes choisies au hasard parmi n personnes aient le même jour d'anniversaire ?

Exercice 14

Une urne contient 20 boules dont 6 sont vertes et 14 blanches. On tire au hasard 4 boules.

1) Les tirages se font avec remise et successivement.
    a) Quel est le nombre de tirages possibles ?
    b) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre une boule verte puis trois boules blanches ?
    c) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule verte et trois boules blanches dans n'importe quel ordre ?
2) Mêmes questions dans le cas où les tirages se font sans remise.
3) Mêmes questions dans le cas où les tirages se font simultanément.

PROBABILITES CONDITIONNELLES

Exercice 15

On lance un dé et on associe à cette expérience aléatoire l'espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$ tel que

ω	1	2	3	4	5	6
$P[\{\omega\}]$	1/4	1/8	1/8	1/8	1/8	1/4

On considère les événements définis par

A="un résultat inférieur ou égal à 5"
B="un résultat pair"

1) Déterminer l'espace $(\Omega,\mathcal{A},P_B)$ de probabilité conditionnelle par rapport à B.
2) Calculer la probabilité de A sachant B.

Exercice 16

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire simultanément au hasard deux chiffres. Sachant que la somme obtenue est paire, calculer la probabilité pour que les deux chiffres soient impairs.

Exercice 17

En considérant l'expérience du jet de deux pièces de monnaie distinctes, étudier l'indépendance ou la dépendance des événements suivants,

A="face apparaît sur la $1^{ère}$ pièce"
B="face apparaît sur la $2^{ème}$ pièce"
C="face apparaît sur une seule des deux pièces"

Exercice 18

Soient les événements,

A="une famille a des enfants des deux sexes"
B="une famille a au plus un garçon"

1) Montrer que A et B sont indépendants si une famille a trois enfants.
2) Montrer que A et B sont dépendants si une famille a deux enfants.

Exercice 19

On sait qu'un quart de la population est vacciné contre l'hépatite B. La probabilité pour un vacciné d'être malade est de 1/12, cette probabilité est de 1/3 pour un non vacciné. On choisit un individu au hasard.

1) Calculer la probabilité d'attraper l'hépatite B.
2) L'individu est malade. Quelle est la probabilité qu'il ait été vacciné ?

Exercice 20

Trois machines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de pièces défectueuses de ces machines sont de 3% pour A, 4% pour B et 5% pour C.

1) Si l'on prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?

2) Si on prend au hasard une pièce défectueuse, calculer la probabilité pour qu'elle ait été produite par la machine A.

Exercice 21

Un avion est porté disparu. On sait qu'il se trouve dans une zone constituée de trois régions. Ces régions sont très différentes pour diverses raisons (géographie, végétation, ...). Les probabilités de retrouver un avion dans chacune de ces régions sont donc différentes. Si l'avion se trouve dans la région 1, il y a 80% de chance de le trouver, s'il se trouve dans la région 2, il y a 90% de chance de le trouver et s'il est dans la région 3, il n'y a plus que 50% de chance de le retrouver.

1) Calculer la probabilité de retrouver l'avion disparu.
2) On a retrouvé l'avion. Quelle est la probabilité qu'il se soit écrasé dans la région 1 ?