Exercice 1. ***1.*** *Soit X une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. On pose $Y = \lfloor 2X + 1 \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}_+$.*

Trouver la loi de Y.

2. *Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la probabilité que X soit paire est plus forte que la probabilité que X soit impaire.*

Exercice 2. *Soit X une v.a.r. gaussienne standard. Calculer $\mathbb{E}[X^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. *Montrer que f et g sont des fonctions de densité.*

2. *Soit X une v.a.r. admettant une densité f_X t.q. $f_X = f$ λ-p.p.*

Trouver la fonction caractéristique de X.

3. *Soit Y une v.a.r. admettant une densité g_X t.q. $g_X = g$ λ-p.p.*

Trouver la fonction caractéristique de Y.

Exercice 4. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. t.q. $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/2$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$.*

Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice 5. *Soit X une v.a.r. de loi uniforme sur $]-\pi, \pi[$. On pose $Y = \sin(X + \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que la densité de Y est donnée par $f_Y(y) = \frac{C}{\sqrt{1-y^2}}\mathbf{1}_{\Delta}(y)$ avec C une constante à déterminer et Δ un ouvert de $\mathbb{R}$ à déterminer.*