

**EXERCICE 1** (3 points). Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. indépendantes de lois respectives  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{P}(\mu)$ .

- Déterminer  $F_X(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par définition on a  $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ , comme  $X$  admet une densité  $f_X$ , d'où  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) [-e^{-\lambda u}]_0^x$ , finalement  $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ .

- Déterminer la loi de la variable aléatoire  $T = \min(X, Y)$ .

Déterminer la loi de  $T$  est par exemple, d'après le cours, déterminer sa fonction répartition. Soit donc  $t \in \mathbb{R}$ , déterminons  $F_T(t)$  : on a  $F_T(t) = \mathbb{P}(\min(X, Y) \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\min(X, Y) > t) = 1 - \mathbb{P}(X > t \text{ et } Y > t) = 1 - \mathbb{P}(X \in ]t, +\infty[ \text{ et } Y \in ]t, +\infty[)$ . Or  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de lois exponentielles d'où  $F_T(t) = 1 - \mathbb{P}(X > t) \mathbb{P}(Y > t) = 1 - (1 - \mathbb{P}(X \leq t))(1 - \mathbb{P}(Y \leq t))$ , finalement  $F_T(t) = (1 - e^{-\lambda t} e^{-\mu t}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) = (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ , finalement on a obtenu la fonction de répartition d'une variable aléatoire  $Z \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ , et donc  $T \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

**EXERCICE 2** (5 points). Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ , définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On pose  $\mu = 1/\lambda$ . Pour tout entier  $n \geq 1$  on pose  $X_n^* = \max_{k \in [1; n]} X_k$  et  $Y_n = \frac{X_n^*}{\ln(n)}$ .

- Montrer que  $\mathbb{P}(X_n^* < a) = (1 - e^{-\lambda a})^n$  pour  $a \geq 0$ .

On a  $\mathbb{P}(X_n^* < a) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n \{X_k \in [0, a[)\})$  et comme les  $X_k$  sont indépendantes avec  $[0, a[ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  d'où  $\mathbb{P}(X_n^* < a) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k < a) = (\mathbb{P}(X_1 \leq a))^n = (F_{X_1}(a))^n = (1 - e^{-\lambda a})^n$  (on a utilisé le fait que  $\mathbb{P}(X_k < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$  en effet  $f_{X_k}$  est p.s. continue sur  $\mathbb{R}_+$ ) en effet les  $X_k$  sont identiquement distribuées et d'après l'Exercice 1 on a  $F_{X_1}(a) = 1 - e^{-\lambda a}$  pour  $a \geq 0$ .

- On se propose de montrer que  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu$ . Soit  $\delta > 0$ .

(a) Montrer que  $\mathbb{P}(|Y_n - \mu| > \delta) = \mathbb{P}(Y_n < \mu - \delta) + \mathbb{P}(Y_n > \mu + \delta)$ .

$\mathbb{P}(|Y_n - \mu| > \delta) = 1 - \mathbb{P}(|Y_n - \mu| \leq \delta) = 1 - \mathbb{P}(-\delta \leq Y_n - \mu \leq \delta) = \mathbb{P}(-\delta \leq Y_n - \mu \leq \delta) + \mathbb{P}(Y_n - \mu < -\delta) + \mathbb{P}(Y_n - \mu > \delta) - \mathbb{P}(-\delta \leq Y_n - \mu \leq \delta)$ , d'où l'égalité.

(b) Montrer que  $\mathbb{P}(Y_n < \mu - \delta) = (1 - e^{-\lambda(\mu - \delta)\ln(n)})^n$  pour  $\delta < \mu$ .

On a  $\mathbb{P}(Y_n < \mu - \delta) = \mathbb{P}(X_n^* < (\mu - \delta)\ln(n)) = (1 - e^{-\lambda(\mu - \delta)\ln(n)})^n$ , d'après la question 1.

(c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n < \mu - \delta)$ .

En posant  $k = \lambda(\mu - \delta) > 0$  on obtient  $\mathbb{P}(Y_n < \mu - \delta) = e^{n^{1-k} g(n^{-k})}$  où  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $g(x) = \ln(1-x)/x$  avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1$  et  $n^{-k} \rightarrow 0^+$ , en effet  $k > 0$ ; on obtient donc avec  $n^{1-k} \rightarrow +\infty$  (en effet  $1 - k = \lambda\delta > 0$ ) on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n < \mu - \delta) = e^{+\infty \times -1} = 0$ .

(d) Montrer que  $\mathbb{P}(Y_n > \mu + \delta) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n \left(\frac{X_k}{\ln(n)} > \mu + \delta\right)\right)$ .

$$\{Y_n > \mu + \delta\} = \{Y_n \leq \mu + \delta\}^c = \left(\bigcap_{k=1}^n \left\{\frac{X_k}{\ln(n)} < \mu + \delta\right\}\right)^c = \bigcup_{k=1}^n \left\{\frac{X_k}{\ln(n)} > \mu + \delta\right\}.$$

(e) En utilisant la sous-additivité de  $\mathbb{P}$ , montrer que  $\mathbb{P}(Y_n > \mu + \delta) \leq n^{-\lambda\delta}$ .

Comme  $\mathbb{P}$  est sous-additive d'où  $\mathbb{P}(Y_n > \mu + \delta) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k > (\mu + \delta) \ln(n)) = ne^{-\lambda \times (\mu + \delta) \ln(n)}$ , ce dernier est égal à  $n \exp(\ln(n^{-\lambda\mu - \lambda\delta})) = n^{1-1-\lambda\delta} = n^{-\lambda\delta}$ .

(f) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Y_n > \mu + \delta)$ .

et donc  $\lambda\delta > 0$  implique avec  $n \rightarrow \infty$  que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\lambda\delta} = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n > \mu + \delta) = 0$ .

(g) Conclure sur la convergence de la suite  $(Y_n)_{n \geq 2}$ .

Finalement avec la question (a) et les limites dans (c) et (f) on obtient :

$$\forall \delta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - \mu| > \delta) = 0, \text{ i.e. par définition } Y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \mu.$$

3. On se propose de montrer que la suite  $(Z_n)_{n \geq 2}$  converge en loi vers une v.a.r à déterminer où  $Z_n = X_n^* - \mu \ln(n)$ .

(a) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $F_Z(t) = (1 - e^{-\lambda(t + \mu \ln(n))})^n$ .

La question 1. donne avec  $a = t + \mu \ln(n)$  la réponse.

(b) Montrer que la fonction  $t \mapsto \exp(-\exp(-\lambda t))$  est une fonction de répartition.

(c) Conclure sur la convergence en loi de la suite  $(Z_n)_{n \geq 2}$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{Q}$  (avec  $\mathbb{Q}$  dense dans  $\mathbb{R}$ )  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(t) = F_Z(t)$  avec  $F_Z$  définie par  $F_Z(t) := e^{-e^{-\lambda t}}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , une fonction de répartition (à vérifier facilement), d'où  $(Z_n)_{n \geq 2}$  converge en loi vers une v.a.  $Z$  de fonction de répartition  $F_Z$  (voir le Théorème du cours).

**EXERCICE 3** (3 points). Soient  $(X_n)_{1 \leq n \leq 6}$  une suite de six variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur  $E' := \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , c'est-à-dire que chaque  $X_n$  représente le tirage d'un nombre entier entre 0 et 9, on a donc pour tout  $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{10}$  pour tout  $j \in E'$ . On pose  $Y = 27 + \sum_{n=1}^3 X_n - \sum_{n=4}^6 X_n$ .

1. Pour tout  $s > 0$  on pose  $Z_s = s^Y$ . Montrer que  $Z_s$  est une variable aléatoire réelle discrète et qu'elle admet une espérance. Calculer  $\mathbb{E}[Z_s]$ .

Soit  $s > 0$ . Remarquons que  $Y = \sum_{n=1}^3 X_n + \sum_{n=4}^6 (9 - X_n)$ , et donc  $Y$  est une v.a.r. discrète p.s. positive (en effet  $X_n \leq 9$  p.s.) à valeurs  $\{0, 1, \dots, 54\}$ . On sait que  $Z_s = g_s(Y)$  où  $g_s : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $g_s(y) = e^{\ln(s)y}$ , est continue et  $Y$  v.a.r. discrète, donc  $Z_s$  est une v.a.r. discrète également.

$\mathbb{E}[Z_s]$  existe donc, en effet  $Z_s$  est une v.a.r. discrète positive, et on a

$$\mathbb{E}[Z_s] = s^{27} \mathbb{E}[g_s(X_1)g_s(X_2)g_s(X_3)h_s(X_4)h_s(X_5)h_s(X_6)],$$

où  $h_s(y) := g_s(-y)$ ,  $h_s$  mesurable positive et  $g_s$  mesurable positive, d'où d'après le cours, avec les  $X_k$  i.i.d., on obtient  $\mathbb{E}[Z_s] = s^{27} \prod_{k=1}^3 \mathbb{E}[g_s(X_k)] \prod_{k=4}^6 \mathbb{E}[h_s(X_k)] = s^{27} \mathbb{E}[g_s(X_1)]^3 \mathbb{E}[h_s(X_1)]^3$  (on a appliqué le  $d$ ) du Théorème 10, page 13). Or  $\mathbb{E}[g_s(X_1)] = \sum_{k=0}^9 \frac{1}{10} s^k = \frac{1}{10} \frac{1-s^{10}}{1-s}$  et  $\mathbb{E}[h_s(X_1)] = \sum_{k=0}^9 \frac{1}{10} s^{-k} = \frac{1}{10} \frac{1-s^{-10}}{1-1/s}$ , d'où  $\mathbb{E}[Z_s] = 10^{-6} \left( s^9 \frac{1-s^{10}}{1-s} \frac{1-s^{-10}}{1-1/s} \right)^3 = \left( \sum_{k=0}^9 \frac{1}{10} s^k \right)^6$ .

2. En déduire la valeur exacte de  $\mathbb{P}(Y = 27)$ .

Comme  $\mathbb{E}[Z_s] = \mathbb{E}[s^Y] = \sum_{k=0}^{54} s^k \mathbb{P}(Y = k)$ , d'où le coefficient de  $s^{27}$  dans le développement de  $\left( \sum_{k=0}^9 \frac{1}{10} s^k \right)^6$  vaut  $\mathbb{P}(Y = 27)$ . Pour cela, on peut par exemple faire appel aux séries : en effet on sait que  $10^6 \mathbb{E}[Z_s] = (1 - s^{10})^6 (1 - s)^{-6}$ , et comme pour tout  $|s| < 1$  on a  $(1 - s)^{-6} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-6}{k} (-1)^k s^k$  et  $(1 - s^{10})^6 = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{i \leq 6} (-1)^i \binom{6}{i} s^{10i}$ . On a donc  $\mathbb{P}(Y = 27) = a_{0,27} + a_{1,17} + a_{2,7} = \frac{13813}{25} 10^{-4} = \frac{55252}{100}$  où  $a_{i,k} = \frac{1}{10^6} \mathbf{1}_{i \leq 6} (-1)^{i+k} \binom{6}{i} \binom{-6}{k}$ .

**EXERCICE 4** (5 points). Soient  $a > 0$  et  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

On définit la v.a.r.  $Y^a$  par  $Y^a = X \mathbf{1}_{\{|X| < a\}} - X \mathbf{1}_{\{|X| \geq a\}}$ . Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$ .

1. Montrer que  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| \geq a\}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \leq y, |X| \geq a\}}]$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .

On a p.s.  $\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| \geq a\}} = \mathbf{1}_{\{-X \leq y, |X| \geq a\}} \leq 1$  et donc  $\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| \geq a\}}$  est intégrable, d'où d'après le Théorème de Transfert, on a  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| \geq a\}}] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$ , où  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \mathbf{1}_{\{-x \leq y, |x| \geq a\}}$ , elle est mesurable bornée. En faisant un changement de variable  $x = -z$ , on obtient par parité  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| \geq a\}}] = \int_{\mathbb{R}} g(-x) f_X(x) dx$ , i.e. que  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| \geq a\}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \leq y, |X| \geq a\}}]$ .

2. En déduire que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $F_{Y^a}(y) = F_X(y)$ . Quelle est la loi de  $Y^a$  ?

Soit  $y \in \mathbb{R}$ .  $F_{Y^a}(y) = \mathbb{P}(Y^a \leq y) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y\}}]$ , i.e.  $F_{Y^a}(y) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y\}} (\mathbf{1}_{\{|X| \geq a\}} + \mathbf{1}_{\{|X| < a\}})] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| \geq a\}}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y^a \leq y, |X| < a\}}] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \leq y, |X| \geq a\}}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \leq y, |X| < a\}}]$ , enfin  $F_{Y^a}(y) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X \leq y\}} (\mathbf{1}_{\{|X| \geq a\}} + \mathbf{1}_{\{|X| < a\}})] = F_X(y)$  (linéarité de l'espérance vient du fait que les v.a. sont intégrables, puisque ceux sont des v.a. indicatrices), en utilisant le fait que les fonctions de répartition caractérisent les lois des v.a. on a donc  $Y^a$  et  $X$  qui suivent les mêmes lois, i.e. que  $Y^a$  a pour loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , donc  $Y^a$  est une v.a.r. gaussienne centrée réduite.

3. Montrer que  $(\sqrt{2}Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $Z$  qui suit la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Vu la forme de la variable aléatoire  $Y_n$ , on est tenté d'appliquer la loi des grands nombres. Cependant on ne peut pas l'appliquer car les v.a.r.  $\sqrt{k}X_k$  ne sont pas identiquement distribuées. On

va donc utiliser les fonctions caractéristiques afin de démontrer un résultat de convergence en loi. Les v.a.r.  $X_k$  sont indépendantes, donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $\phi_{\sqrt{2}Y_n}(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_n}\left(\frac{\sqrt{2k}}{n}t\right)$ , or  $\phi_{X_n}(u) = e^{-u^2/2}$  lorsque  $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , d'où  $\phi_{\sqrt{2}Y_n}(t) = \prod_{k=1}^n e^{-kt^2/n^2} = e^{-\frac{n(n+1)}{2} \frac{t^2}{n^2}} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2}$ , finalement on reconnaît la fonction caractéristique d'une v.a.r. qui suit une loi gaussienne centrée réduite (elle est continue au point 0 ; en fait ici on a utilisé le Théorème de continuité de P. Lévy), par conséquent on en conclut que  $(\sqrt{2}Y_n)_n$  converge en loi vers une v.a.r.  $Z$  t.q.  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**EXERCICE 5** (4 points). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité. Soit  $X$  une v.a.r. qui admet une densité  $f_X$  égale à  $f$   $\lambda$ -p.p. sur  $\mathbb{R}$ . Déterminer  $F_X$ .

D'après le cours ((a) du Théorème 18, page 19)  $f$  est une densité de probabilité si  $f$  est borélienne positive et  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ . Ce qui est le cas, en effet  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  avec  $f \geq 0$   $\lambda$ -p.p. et  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+\infty} = 1$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]_{-\infty}^x \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ , finalement  $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ .

2. En déduire  $F_Y(y)$  et  $f_Y(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , où  $Y = \varphi(X)$ , où  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Quelle est la loi de  $Y$  ?

La fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , en effet  $u : x \mapsto e^x - 1$  et  $v : x \mapsto e^x + 1$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $v(x)^2 \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ , et donc  $\varphi'$  est continue et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $h = \varphi^{-1}$  sa fonction réciproque, qui est définie sur  $\varphi(\mathbb{R}) = ]-1, 1[$  (en effet  $\varphi' > 0 \Rightarrow \varphi$  croissante sur  $\mathbb{R}$ , et  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = \pm 1$ ) par  $h : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ . La fonction  $h$  est continûment dérivable sur  $] - 1, 1[$ . Alors d'après le cours on a  $Y$  qui admet une densité  $f_Y$  donnée par  $f_Y(y) = |h'(y)| f_X(h(y)) \mathbf{1}_{\varphi(\mathbb{R})}(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , i.e. que  $f_Y(y) = \frac{2}{1-y^2} \frac{1}{4} (1-y^2) \mathbf{1}_{]-1, 1[}(y) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{]-1, 1[}(y)$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ; finalement  $Y$  est une v.a.r. qui suit une loi uniforme sur  $] - 1, 1[$ .