

Règles

Les calculatrices et les documents sont interdits. Il est très important de rédiger proprement et de montrer rigoureusement chaque étape d'un raisonnement.

Notations et quelques rappels de formules : Pour toute variable aléatoire réelle X la fonction F_X désigne sa fonction de répartition et ϕ_X , définie sur \mathbb{R} par $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}] := \mathbb{E}[\cos(uX)] + i\mathbb{E}[\sin(uX)]$ avec $i^2 = -1$, désigne sa fonction caractéristique et f_X une densité de X si elle en admet. Dans tous les exercices K désigne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 [3 points] Soit X une v.a.r. définie sur K . On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre 1. On pose $Y = \cos(X)$. Calculer $\phi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Montrer que $Y \in \mathcal{L}^2(K)$ et en déduire, en justifiant rigoureusement, les expressions simplifiées de $\mathbb{E}[Y]$ et $\text{Var}(Y)$.

Solution : X est une v.a.r. discrète à valeurs \mathbb{N} et \cos est continu sur \mathbb{R} , donc Y est une v.a.r. discrète à valeurs $E' = \{\cos(k), k \in \mathbb{N}\}$. Soit $u \in \mathbb{R}$. Rappelons que d'après le cours $\phi_X(u)$ existe avec sa partie réelle et sa partie imaginaire qui sont finies. Sachant que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, les v.a.r. $\cos(uX)$ et $\sin(uX)$ sont des v.a.r. discrètes et bornées, on obtient donc d'après le cours $\mathbb{E}[\cos(uX)] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \cos(uk) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(uk) \frac{e^{-1} 1^k}{k!}$ et $\mathbb{E}[\sin(uX)] = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(uk) \frac{1}{k!}$ qui sont deux sommes finies, donc $\phi_X(u) = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(uk) + i \sin(uk)}{k!} = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{iuk}}{k!}$,

i.e. $\phi_X(u) = \exp(-1 + \exp(iu))$, en effet pour tout $c \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c^k}{k!} = e^c$ et $e^{cb} = (e^c)^b$

Comme $Y \leq 1$ d'où $Y^k \in \mathcal{L}^1$ pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, en l'occurrence $Y \in \mathcal{L}^2$, donc Y admet une variance (donc Y^k admet une espérance et elle est finie) et d'après le cours $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k)}{k!} = \text{Re}(\phi_X(1)) = e^{-1+\cos(1)} \cos(\sin(1))$ et $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$. Sachant que $\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos(k)^2 \frac{e^{-1}}{k!} = e^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+\cos(2k)}{2} \frac{1}{k!} = \frac{1}{2}(1 + \text{Re}(\phi_X(2))) = \frac{1}{2}(1 + e^{-1+\cos(2)} \cos(\sin(2)))$, d'où la variance de Y .

Exercice 2 [5 points] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité que l'on note par E . Soit T une v.a.r. définie sur \overline{E} admettant une densité f_T donnée par $f_T = Ct(1-t)\mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante non aléatoire.

1. Quelle est la valeur de C ?

Solution : f_T étant une fonction de densité, on a $\int_{\mathbb{R}} f_T(t) dt = 1$, i.e. $C \int_0^1 t(1-t) dt = 1$, et donc $C(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1$, i.e. $C = 6$.

2. Montrer que T est de carré intégrable. En déduire, en justifiant, que T admet une espérance $\mathbb{E}[T]$ et une variance $\text{Var}(T)$ que vous déterminerez.

Solution : Sachant que $\mathbb{P}(T \in [0,1]) = \int_{[0,1]} f_T(t) dt = 1$ d'où $0 \leq T \leq 1$ p.s. et donc $T^2 \leq 1$ d'où T^2 est de carré intégrable, et donc la variance est bien définie, d'après la définition de cette dernière, d'où T admet une espérance également, qui est finie. En utilisant le théorème de transfert avec $[0,1] \ni t \mapsto h_k(t) = t^k \in \mathbb{R}_+$ qui est continue (donc mesurable) et positive pour tout $k \in \{1,2\}$ et T qui admet une densité, on a $\mathbb{E}[T^2] = \mathbb{E}[h_2(T)] = \int_{\mathbb{R}} h_2(t) f_T(t) dt = 6 \int_0^1 t^3(1-t) dt = 6(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) = \frac{6}{20}$ et $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[h_1(T)] = 6 \int_0^1 t^2(1-t) dt = 6(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{12}$, i.e. $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{12}$, et donc $\text{Var}(T) = \frac{3}{10} - \frac{1}{2^2}$, i.e. $\text{Var}(T) = \frac{1}{20}$.

3. Donner l'expression de $F_T(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Solution : Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ca(1-a)\mathbf{1}_{]-\infty, t] \cap [0,1]}(a) da = \mathbf{1}_{[0,1]}(t) \int_0^t Ca(1-a) da + \mathbf{1}_{]1, +\infty[}(t)$, i.e. $F_T(t) = (3-2t)t^2\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \mathbf{1}_{]1, +\infty[}(t)$

4. Soit Y la v.a.r. définie sur E telle que $Y = \sqrt{T^2 + 1}$. Montrer que Y admet une densité f_Y et donner une expression de f_Y explicitement.

Solution : Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $F_Y(y) = \mathbb{P}(\sqrt{T^2 + 1} \leq y) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbb{P}(T^2 \leq y^2 - 1) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(y) \mathbb{P}(T \leq \sqrt{y^2 - 1})$, donc $F_Y(y) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(y) \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(y) ((3-2\sqrt{y^2-1})(y^2-1)\mathbf{1}_{[0, \sqrt{2}]}(y) + \mathbf{1}_{] \sqrt{2}, +\infty[}(y))$, et donc on obtient $F_Y(y) = (3-2\sqrt{y^2-1})(y^2-1)\mathbf{1}_{[1, \sqrt{2}]}(y) + \mathbf{1}_{] \sqrt{2}, +\infty[}(y)$, où on a F_Y dérivable sur $[1, \sqrt{2}]$; cela implique que Y admet une densité f_Y donnée par $f_Y(y) = C \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \right) \Big|_{t=\sqrt{y^2-1}} \left(\frac{d}{dy} \sqrt{y^2-1} \right) \mathbf{1}_{[1, \sqrt{2}]}(y)$, c'est-à-dire qu'on a $f_Y(y) = Cy(1-\sqrt{y^2-1})\mathbf{1}_{[1, \sqrt{2}]}(y)$.

Exercice 3 [4 points] Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que une densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ et $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. On considère un entier $n \geq 100$ et on note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ la moyenne des n premiers X_k .

1. La suite $(\bar{X}_m)_{m \geq 1}$ converge vers quelle variable aléatoire ? et quels sont les types convergences valables pour cette limite ?

Solution : On peut utiliser la loi forte des grands nombres, avec $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui est bien une suite de v.a.r. i.i.d. de carré intégrable avec $\mu = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{\lambda}$ et $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} < \infty$; et on obtient que $(\bar{X}_m)_{m \geq 1}$ converge p.s. et converge dans \mathcal{L}^2 vers μ (cela implique convergence dans \mathcal{L}^2 aussi).

On aurait pu utiliser la loi faible des grands nombres, en utilisant i.i.d. et $X_1 \in \mathcal{L}^1$, avec convergence p.s. et dans \mathcal{L}^1 .

2. On suppose que $\lambda = \frac{1}{2}$ et $n = 100$.

Estimer à l'aide du Théorème Limite Centrale la probabilité $\mathbb{P}(1,9 \leq \bar{X}_n \leq 2,1)$.

Solution : Ici on peut utiliser le Théorème limite centrale, en effet on réutilise les hypothèses utilisées dans la loi forte des grands nombres, et on a $((n\bar{X}_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n})_n$ converge en loi vers une v.a. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a \leq \sqrt{n}(\bar{X}_n - 2)/2 \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)$, i.e. a et b sont tels que $2a/\sqrt{n} + 2 = 1,9$ et $2b/\sqrt{n} + 2 = 2,1$, i.e. $a = 5(1,9 - 2) = -0,5$ et $b = 5(2,1 - 2) = 0,5$. Or $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \phi(0,5) - \phi(-0,5) = 2\phi(0,5) - 1 = 2 \times 0,69146 \dots - 1 = 0,38292 \dots$

3. Déterminer α_n et β_n (ne dépendant que de n) tels que $\mathbb{P}(\alpha_n \leq \lambda \bar{X}_n \leq \beta_n) \approx 0,99$.

Solution : De façon analogue, on obtient $2a/\sqrt{n} + 2 = \alpha_n/\lambda$ et $2b/\sqrt{n} + 2 = \beta_n/\lambda$, i.e. $a = 2(\alpha_n - 1)\sqrt{n}$ et $b = 2(\beta_n - 1)\sqrt{n}$, comme il y a une infinité de cas de (a, b) tels que $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 0,99 \dots$ prenons comme précédemment $a = -b$ et b positif, i.e. que $2\phi(b) - 1 = 0,99$, i.e. $\phi(b) = 0,995$, i.e. $b = 2,57$, d'où $\alpha_n = 2\lambda(a/\sqrt{n} + 1) = 1 + 2,57/\sqrt{n}$ et $\beta_n = 1 - 2,57/\sqrt{n}$.

Exercice 4 [8 points] Soit X une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer $F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{]-\infty, x] \cap [0, +\infty[}(u) \lambda e^{-\lambda u} du$, donc $F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $X^k \in \mathcal{L}^1(K)$ et calculer $\mathbb{E}[X^k]$.

Solution : Comme $X \geq 0$ p.s. on a donc $X^k \geq 0$ p.s. i.e. X^k qui admet une espérance, et par conséquent on peut utiliser le théorème de transfert avec h_k définie par $h_k(x) = x^k$ sur \mathbb{R}_+ , en effet X admet une densité; d'où $\mathbb{E}[|X^k|] = \mathbb{E}[X^k] = \int_{\mathbb{R}_+} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx$, par une IPP et une petite récurrence (à détailler rigoureusement !) on obtient que $\mathbb{E}[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$, et donc on a bien $X^k \in \mathcal{L}^1$.

3. Déterminer $\phi_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le cours (c'était justifié) on peut utiliser le théorème de transfert et donc on obtient $\operatorname{Re}(\phi_X(x)) = \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xu) \lambda e^{-\lambda u} du = \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} [e^{-\lambda u} (x \sin(xu) - \lambda \cos(xu))]_0^{+\infty} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + x^2}$ (on justifie ces limites ! en bornant par exemple), et de même (en justifiant encore les limites ! ça prend une ou deux minutes) on obtient $\operatorname{Im}(\phi_X(x)) = \frac{\lambda x}{\lambda^2 + x^2}$, d'où $\phi_X(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} (\lambda + ix)$

4. Soient x, y deux réels strictement positifs. Calculer $\mathbb{P}(\{X > x + y\} | \{X > x\})$.

Solution : Sachant que $x > 0$ d'où en utilisant la question 2. on a $\mathbb{P}(X > x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x} > 0$, d'où $\mathbb{P}(\{X > x + y\} | \{X > x\}) = \mathbb{P}(X > x + y \text{ et } X > x) / \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > x + y) / \mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda(x+y)} / e^{-\lambda x}$, i.e. $\mathbb{P}(\{X > x + y\} | \{X > x\}) = e^{-\lambda y}$, on dit qu'il n'y a pas de dépendance du passé.

5. Déterminer la loi de $p(X)$ où $p(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

Solution : $X \geq 0$ p.s. et pour tout $\omega \in \Omega$ on a $(p(X))(\omega) \in \mathbb{N}$ par définition de la partie entière, donc $p(X)$ est une variable aléatoire discrète à valeurs entières positifs, donc d'après le cours la loi de $p(X)$ est l'ensemble $\{\mathbb{P}(p(X) = k), k \in \mathbb{N}\}$. Or pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(p(X) = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k+1) = F_X((k+1)^-) - F_X(k^-) = F_X(k+1) - F_X(k)$ car F_X est continue, alors on a $\mathbb{P}(p(X) = k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)}$. Vérification se fait par $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(p(X) = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda(+\infty)} = 1 - 0 = 1$

6. Déterminer la loi de Z où $Z = X - p(X)$.

Solution : Sachant que $Z \in [0, 1[$ p.s. (partie fractionnaire) on a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbf{1}_{[0, 1[}(t) \mathbb{P}(X - p(X) \leq t) + \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(t)$, donc pour $0 \leq t < 1$ on a $\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(X - p(X) \leq t) = \mathbb{P}(X - p(X) \leq t, X \in \cup_{k \in \mathbb{N}} [k, k+1[) = \mathbb{P}(\cup_{k \in \mathbb{N}} \{X - p(X) \leq t, X \in [k, k+1[\})$, comme il s'agit d'une union d'événements disjoints, d'où grâce à la σ -additivité de \mathbb{P} , on obtient $\mathbb{P}(Z \leq t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq X < k+1, X - k \leq t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(k \leq X \leq t+k) = (1 - e^{-\lambda t}) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k} = (1 - e^{-\lambda t}) \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$, en effet $0 < e^{-\lambda} < 1$ grâce à $\lambda > 0$. F_Z est aussi dérivable sur $[0, 1[$, et donc Z admet une densité f_Z donnée par $f_Z(z) = \lambda \frac{e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} \mathbf{1}_{[0, 1[}(z)$, et on a aussi $F_Z(z) = \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} \mathbf{1}_{[0, 1[}(z) + \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(z)$.

7. Montrer que Z est de carré intégrable. Calculer $\operatorname{Var}(Z)$.

Solution : Comme $Z \in [0, 1[$ p.s. d'où $Z^2 \leq 1$ p.s. et donc $Z^2 \in \mathcal{L}^1$, i.e. Z est bien de carré intégrable, donc $\operatorname{Var}(Z)$ existe et on a avec le théorème de transfert bien justifié $\operatorname{Var}(Z) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \int_0^1 z^2 e^{-\lambda z} dz - \frac{\lambda^2}{(1 - e^{-\lambda})^2} \left(\int_0^1 z e^{-\lambda z} dz \right)^2 = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \mathbb{E}[X^2] - \frac{1}{(1 - e^{-\lambda})^2} \mathbb{E}[X]^2$, finalement $\operatorname{Var}(Z) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{(1 - e^{-\lambda})^2} \frac{1}{\lambda^2}$, i.e. $\operatorname{Var}(Z) = \frac{1 - 2e^{-\lambda}}{\lambda^2 (1 - e^{-\lambda})^2}$.