EISTI 2019-2020
ING1 - GM : Probabilités

TD 5 - Probabilités sur $\mathbb{R}$ et Variables aléatoires réelles

---

Exercice 5 *Soit la fonction F donnée par $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathbf{1}_{[1/i,\infty[}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Montrer que c'est la fonction de répartition d'une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$.

Trouver la probabilité des événements suivants :

a) $[1,\infty[$, *b)* $[\frac{1}{10},\infty[$, *c)* $\{0\}$, *d)* $[0,\frac{1}{2}[$, *e)* $]-\infty,0[$, *f)* $]0,\infty[$.

Solution : Il est clair que F est croissante (à montrer nous l'avons fait au tableau). Pour $x<0$ et $x \geq 1$ F est clairement càd.

Pour $0 < x < 1$, soit i^* tel que $\frac{1}{i^*+1} \leq x < \frac{1}{i^*}$ (en effet voir la note ci-dessous en rouge*)

Soit $(x_n)_n$ une suite qui tend vers x en étant décroissante, alors il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{i^*+1} \leq x_n < \frac{1}{i^*}$. D'où $F(x_n) = F(x)$ pour tout $n \geq N$, ce qui implique que F est càd en x.

Pour $x = 0$, on a $F(0) = 0$. Notons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Donc pour tout x tel que $|x| \geq \frac{1}{N}$ on a $F(x) \leq \varepsilon$. D'où $F(0^+) = 0$. Finalement F est càd en tout point x.

On a également $F(\infty) = 1$ et $F(-\infty) = 0$, donc F est bien une fonction de répartition d'une probabilité sur $\mathbb{R}$, d'après le cours.

$\mathbb{P}([1,\infty[) = F(\infty) - F(1^-) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\mathbb{P}([\frac{1}{10},\infty[) = F(\infty) - F(\frac{1}{10}^-) = 1 - \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 2^{-10}$.

$\mathbb{P}(\{0\}) = F(0) - F(0^-) = 0 = 0$

$\mathbb{P}([0,\frac{1}{2}[) = F(\frac{1}{2}^-) - F(0^-) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 0 = \frac{1}{4}$.

$\mathbb{P}(]-\infty,0[) = F(0^-) = 0$.

$\mathbb{P}(]0,\infty[) = 1 - F(0) = 1$.

Exercice 6

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{A}' = \{A \cup N \,:\, A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}\}$ où $\mathcal{N}$ est classe des ensembles négligeables. D'après le cours de Mesure et Intégration $\mathcal{A}'$ est une tribu sur Ω telle que $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}'$.

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux applications telles que $\{X \neq Y\} \in \mathcal{N}$ (i.e. $X = Y$ p.s.).

Montrer que $X : (\Omega,\mathcal{A}') \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $Y : (\Omega,\mathcal{A}') \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Solution : Par symétrie (en effet $\{X \neq Y\} = \{Y \neq X\}$) il suffit de démontrer le sens $\Leftarrow$.

Supposons que $Y : (\Omega,\mathcal{A}') \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, donc par définition

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ Y^{-1}(A) \in \mathcal{A}'.$$

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On a

$$\begin{aligned}
X^{-1}(A) &= X^{-1}(A) \cap \Omega \\
&= X^{-1}(A) \cap (Y^{-1}(A) \cup Y^{-1}(A)^c) \\
&= (X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(A)) \cup (X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(A)^c) \\
&= (Y^{-1}(A) \cap (Y^{-1}(A)^c \cup X^{-1}(A))) \cup (X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(A)^c) \\
&= (Y^{-1}(A) \cap (Y^{-1}(A) \cap X^{-1}(A)^c)^c) \cup (X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(A)^c).
\end{aligned}$$

Comme $Y^{-1}(A) \cap X^{-1}(A)^c = \{Y \in A, X \notin A\}$, $X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(A)^c = \{X \in A, Y \notin A\} \in \mathcal{N}$, en effet ils sont sous-ensembles de $\{X \neq Y\}$, d'où des éléments de $\mathcal{A}'$.

Donc $Y^{-1}(A) \in \mathcal{A}'$ implique que $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}'$.

---

* i^* existe et dépend de x, en effet $i^* = \frac{1}{x} - 1 \geq 2$ si $\frac{1}{x} \in \mathbb{N}^*$ et $i^* = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \geq 1$ si $\frac{1}{x} \notin \mathbb{N}^*$.