

---

TD 6bis - Lois usuelles

---

**Exercice 1** Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une densité  $f_X$  définie par  $f_X(x) = \theta e^{-\theta(x-\nu)} \mathbf{1}_{C_X}(x)$  où  $C_X = ]\nu, +\infty[$  avec  $\nu > 0$  et  $\theta > 0$ .

1. Trouver la fonction génératrice  $M_X$  de  $X$  i.e. trouver  $M_X(t)$  où  $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ .  
Trouver la moyenne de  $X$  et la variance de  $X$ .

2. Un sous-marin nucléaire voyage en plongée mais doit néanmoins faire surface pour renouveler son atmosphère. La durée d'une plongée en jours suit une loi exponentielle. En dépouillant tous les livres de bord, on constate que 88% des plongées ont duré plus de six jours.

a. Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  représentant le temps de plongée du sous-marin.

b. Calculer la probabilité pour qu'une plongée dure plus d'une semaine.

c. Sachant que le sous-marin évolue immergé depuis une semaine, calculer la probabilité pour que la plongée dépasse dix jours.

**Exercice 2** Soient  $X_i, i \in \{1, 2\}$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle t.q.  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$  et on pose  $Y = \min(X_1, X_2)$ .

1. Pour tout réel  $y$ , calculer  $\mathbb{P}(Y > y)$ . En déduire que  $Y \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (respectivement au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 minutes (respectivement 30 minutes). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier ?

3. En moyenne, après combien de temps sort le dernier ?

**Exercice 3** Soit  $X \sim \text{Exp}(\theta)$ , on note  $Y = [X]$  la partière entière de  $X$ . Montrer que  $\mathbb{P}(Y = n) = pq^n$  avec  $p$  et  $q$  à trouver.

Comment appelle-t-on la loi de  $Y$  ?

Montrer que si  $X \sim \text{Exp}(\theta)$  alors  $e^{-\theta X} =: U \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$ .

**Exercice 4** Soit  $X \sim \mathcal{N}(3, 9)$ . Donner avec un chiffre significatif les valeurs des probabilités suivantes :  $\mathbb{P}(2 < X < 5)$ ,  $\mathbb{P}(X > 3)$ ,  $\mathbb{P}(|X - 3| > 6)$ .

Trouver la valeur de  $k$  telle que  $\mathbb{P}(X < k) = 0.974$ , puis  $\mathbb{P}(X > k) = 0.242$  et enfin  $\mathbb{P}(X > k) = 0.97$ .

**Exercice 5** Dans le cadre d'une enquête hospitalière, on suppose connaître pour chaque sujet la cause de son décès, à savoir lié au cancer des bronches, ou à toute cause (accident, autre maladie, etc...). Pour les sujets de la première catégorie (cancer des bronches), on admet que la distribution du délai de survie désigné par  $X$  (exprimé en mois) suit une loi Lognormale d'espérance  $\mu_X$  et de variance  $\sigma_X^2$ , c'est-à-dire que l'on peut trouver des constantes  $a, b$  et  $x_0$  telles que  $a \ln(X - x_0) + b := Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ .

a. Calculer  $\mu_X$  en fonction de  $a, b, x_0, \mu_Y$  et  $\sigma_Y$ .

b. Pour étudier la moyenne des délais de survie sur un groupe de  $n$  sujets, revient-il au même de considérer les moyennes empiriques  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  ?

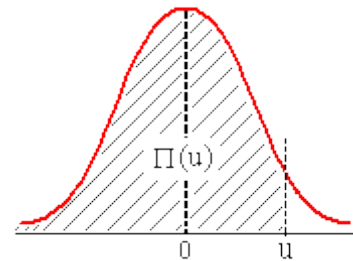
c. On admet que  $Y := \ln(X)$  est telle que  $Y \sim \mathcal{N}(1.8; 1)$ .

Avant la fin de l'enquête on désire étudier le délai moyen de survie observé sur les 16 premiers sujets, tous décédés.

Trouver  $\mathbb{P}(\bar{Y} > 2.8)$ .

# Table de Loi Normale

Fonction de répartition  $\Pi$  de la loi normale  
centrée réduite :  $U \sim N(0, 1)$ .  
Probabilité de trouver une valeur inférieure à  $u$  :  
 $\Pi(u) = P(U \leq u)$  ;  $\Pi(-u) = P(U \leq -u) = 1 - \Pi(u)$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	<b>0.89617</b>	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992

Exemple :  $\Pi(1.26) = P(U \leq 1.26) = 0.89617 = 89.62\%$

## Fractiles de la Loi Normale

$$U \rightarrow N(0, 1).$$

*Pour  $P < 0.5$  (colonne de gauche et ligne supérieure). les fractiles sont négatifs.*

*Pour  $P > 0.5$  (colonne de droite et ligne inférieure). les fractiles sont positifs.*

P	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.01	
<b>0</b>	infini	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656	2.3263	<b>0.99</b>
<b>0.01</b>	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0748	2.0537	<b>0.98</b>
<b>0.02</b>	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957	1.8808	<b>0.97</b>
<b>0.03</b>	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624	1.7507	<b>0.96</b>
<b>0.04</b>	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546	1.6449	<b>0.95</b>
<b>0.05</b>	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632	1.5548	<b>0.94</b>
<b>0.06</b>	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833	1.4758	<b>0.93</b>
<b>0.07</b>	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118	1.4051	<b>0.92</b>
<b>0.08</b>	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469	1.3408	<b>0.91</b>
<b>0.09</b>	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873	1.2816	<b>0.90</b>
<b>0.10</b>	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319	1.2265	<b>0.89</b>
<b>0.11</b>	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800	1.1750	<b>0.88</b>
<b>0.12</b>	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311	1.1264	<b>0.87</b>
<b>0.13</b>	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848	1.0803	<b>0.86</b>
<b>0.14</b>	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0451	1.0407	1.0364	<b>0.85</b>
<b>0.15</b>	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986	0.9945	<b>0.84</b>
<b>0.16</b>	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581	0.9542	<b>0.83</b>
<b>0.17</b>	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192	0.9154	<b>0.82</b>
<b>0.18</b>	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816	0.8779	<b>0.81</b>
<b>0.19</b>	0.8779	0.8742	0.8706	0.8669	0.8632	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452	0.8416	<b>0.80</b>
<b>0.20</b>	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099	0.8064	<b>0.79</b>
<b>0.21</b>	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756	0.7722	<b>0.78</b>
<b>0.22</b>	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421	0.7388	<b>0.77</b>
<b>0.23</b>	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095	0.7063	<b>0.76</b>
<b>0.24</b>	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776	0.6745	<b>0.75</b>
<b>0.25</b>	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464	0.6433	<b>0.74</b>
<b>0.26</b>	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158	0.6128	<b>0.73</b>
<b>0.27</b>	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858	0.5828	<b>0.72</b>
<b>0.28</b>	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563	0.5534	<b>0.71</b>
<b>0.29</b>	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273	0.5244	<b>0.70</b>
<b>0.30</b>	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987	0.4958	<b>0.69</b>
<b>0.31</b>	0.4958	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705	0.4677	<b>0.68</b>
<b>0.32</b>	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427	0.4399	<b>0.67</b>
<b>0.33</b>	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152	0.4125	<b>0.66</b>
<b>0.34</b>	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880	0.3853	<b>0.65</b>
<b>0.35</b>	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611	0.3585	<b>0.64</b>
<b>0.36</b>	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	<b>0.3425</b>	0.3398	0.3372	0.3345	0.3319	<b>0.63</b>
<b>0.37</b>	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081	0.3055	<b>0.62</b>
<b>0.38</b>	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819	0.2793	<b>0.61</b>
<b>0.39</b>	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559	0.2533	<b>0.60</b>
<b>0.40</b>	0.2533	0.2508	<b>0.2482</b>	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301	0.2275	<b>0.59</b>
<b>0.41</b>	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045	0.2019	<b>0.58</b>
<b>0.42</b>	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789	0.1764	<b>0.57</b>
<b>0.43</b>	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535	0.1510	<b>0.56</b>
<b>0.44</b>	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282	0.1257	<b>0.55</b>
<b>0.45</b>	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030	0.1004	<b>0.54</b>
<b>0.46</b>	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778	0.0753	<b>0.53</b>
<b>0.47</b>	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527	0.0502	<b>0.52</b>
<b>0.48</b>	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276	0.0251	<b>0.51</b>
<b>0.49</b>	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025	0.0000	<b>0.50</b>
	<b>0.01</b>	<b>0.009</b>	<b>0.008</b>	<b>0.007</b>	<b>0.006</b>	<b>0.005</b>	<b>0.004</b>	<b>0.003</b>	<b>0.002</b>	<b>0.001</b>	<b>0</b>	<b>P</b>

Exemples :  $\Pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.6340 \Rightarrow u = 0.3425$  ;  $\Pi(u) = P(U \leq u) = P = 0.4020 \Rightarrow u = -0.2482$