Corrigé TD n° 1

EX 1 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r de densité $f_{X_n}(x) = n e^{-nx} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

1°) Cherchons la fonction de répartition $F_{X_n}(x)$. On a :

$F_{X_n}(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_n}(t)\,dt$ si $x \geq 0$

d'où $F_{X_n}(x) = \int_0^x n e^{-nt}\,dt = \left[-e^{-nt}\right]_0^x = 1 - e^{-nx}$

d'où
$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = 1$. $\Rightarrow (F_{X_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.p vers la fonction 1 ; la fonction de densité f de X est nulle p.p $\Rightarrow X = 0$.

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} 0$. $\Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{loi} 0$

2°) soit $\varepsilon > 0$, $P(|X_n| > \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_{X_n}(x)\,dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} n e^{-nx}\,dx = \left[-e^{-nx}\right]_{\varepsilon}^{+\infty}$

$$= e^{-n\varepsilon} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} 0$

la convergence en Proba. entraîne celle en loi, on retrouve bien le résultat de 1°)

EX 2 1°) Inégalité de Markov : soit X une v.a.r positive, on a pour tout nombre réel a strictement positif :

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X).$$

Preuve : $E(X) = \int_{\Omega} X\,dP = \int_{\{X \geq a\}} X\,dP + \int_{\{X < a\}} X\,dP$

d'où $E(X) = \int_\Omega X \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} dP + \int_\Omega X \mathbb{1}_{\{X < a\}} dP$; Rq $\int_A f dP = \int_\Omega f \mathbb{1}_A dP$

$\int_A dP = P(A)$

$$\geq \int_\Omega X \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} dP$$

$$\geq \int_\Omega a \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} dP = a \int_{\{X \geq a\}} dP = a P(X \geq a).$$

donc $P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X)$. cqfd.

2) soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r tq $\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = c$ et $\lim_{n \to +\infty} V(X_n) = 0$. Pour mq $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} c$ on va utiliser un corollaire de l'inégalité de Markov :

soit ϕ une fonction croissante positive et Y une v.a.r alors $\forall b \in \mathbb{R}$ tq $\phi(b) > 0$ on a $P(Y \geq b) \leq \frac{E(\phi(Y))}{\phi(b)}$

Preuve : on applique l'inégalité de Markov à $Z = \phi(Y)$

d'où $P(\phi(Y) \geq \phi(b)) \leq \frac{E(\phi(Y))}{\phi(b)}$

La croissance de ϕ entraine que $\{Y \geq b\} \Rightarrow \{\phi(Y) \geq \phi(b)\}$

et donc $P(Y \geq b) \leq P(\phi(Y) \geq \phi(b))$

ainsi $P(Y \geq b) \leq \frac{E(\phi(Y))}{\phi(b)}$.

Rq si on choisit $Y = |X - E(X)|$ et $\phi(x) = x^2$ on obtient l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{E[(X - E(X))^2]}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}$$

1/ soit $\varepsilon > 0$ $\quad P(|X_n - c| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E((X_n - c)^2)}{\varepsilon^2}$

on applique la BT avec $Y = |X_n - c|$ et $\varphi(x) = x^2$

c-a-d $P(|X_n - c| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{Var(X_n - c) + [E(X_n - c)]^2}{\varepsilon^2}$ $\qquad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$\leq \frac{Var(X_n) + [E(X_n - c)]^2}{\varepsilon^2}$$

donc si $Var(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $[E(X_n - c)]^2 = [E(X_n) - c]^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = c$ Hyp.

alors on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} P(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0 \quad \text{c-a-d}$$

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} c.$$

• soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.r indep. admettant même espérance et même variance finie : on a en posant

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ que $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} n . E(X_1) = E(X_1)$

$$var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} . \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} n . V(X_1) = \frac{1}{n} V(X_1)$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} E(\bar{X}_n) = E(X_1)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V(\bar{X}_n) = 0 \Rightarrow$

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{P} E(X_1) \quad \text{c-a-d}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} P\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - E(X_1) \geq \varepsilon\right) = 0.$$

EX 3 1) Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indep. tq

$P(Z_n = 1) = \frac{1}{n}$ et $P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$.

Etudions la convergence en moyenne quad. de $(Z_n)_{n\geq 1}$.

k	1	0
$P(Z_n = k)$	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

$\Rightarrow$

k	1	0
$P(Z_n^2 = k)$	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$

car $Z_n^2 = 1 \Leftrightarrow Z_n = 1$

et $Z_n^2 = 0 \Leftrightarrow Z_n = 0$.

d'où $E(Z_n^2) = 1^2 \cdot P(Z_n^2 = 1) + 0^2 \cdot P(Z_n^2 = 0) = \frac{1}{n}$

d'où ~~$E Z_n^2 - 1$~~ $E(|Z_n - 0|^2) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Rightarrow (Z_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers 0,

et donc en moyenne et en probabilité vers 0.

2) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r tq

$P(X_n = u_n) = \frac{1}{n^2}$ et $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$.

a) $u_n = n^2$, on a $P(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$ pour tout $\varepsilon > 0$

et donc $\sum_{n\geq 1} (P|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$ (série

de Riemann convergente, d'aprè le cours $(X_n)_{n\geq 1}$ converge

presque sûrement et donc en probabilité vers 0.

En revanche $E(X_n) = 0 \cdot P(X_n = 0) + n^2 P(X_n = n^2) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} E(|X_n - 0|) = 1 \Rightarrow (X_n)_{n\geq 1}$ ne converge

pas en moyenne vers 0.

b) $u_n = n$; on a $\cdot$ $E(X_n) = 0 \cdot P(X_n = 0) + n \cdot P(X_n = n)$
$$= n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow E(|X_n - 0|) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{moyenne}} 0 .$$

$\cdot$ $E(X_n^2) = 0^2 P(X_n = 0) + n^2 P(X_n = n) = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1$
$$\Rightarrow P(|X_n - 0|^2) = 1 \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

donc $(X_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

<u>EX4</u> on effectue n expériences successives indép. et on s'intéresse à la réalisation d'un événement A. à chaque expérience i ; $1 \leq i \leq n$ on associe une variable X_i de Bernoulli de paramètre p. c-à-d
$$P(X_i = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_i = 0) = 1 - p = q$$
soit $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; comme les variables X_i sont indép. alors Z_n suit une loi binomiale $B(n, p)$

on sait que $E(Z_n) = np$. et $V(Z_n) = npq$

d'où $\cdot E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} Z_n\right) = \frac{1}{n} E(Z_n) = p$.
$$V(\overline{X}_n) = V\left(\frac{1}{n} Z_n\right) = \frac{1}{n^2} V(Z_n) = \frac{pq}{n}$$
en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\overline{X}_n$ on obtient $\forall \varepsilon > 0$ $P(|\overline{X}_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}$

c-à-d $\forall \varepsilon > 0$ $P(|\overline{X}_n - p| > \varepsilon) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
$$\text{donc} \quad \overline{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{Proba}} p$$

la frequence empirique d'un événement converge en proba. vers la probabilité de réalisation de cet evenement ou plus exactement la convergence en proba. a lieu vers l'espérance de la v.a.r qui modélise l'expérience.

EX5 $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r indep. de même loi tq $E(X_1) < +\infty$.

on a $\frac{X_n}{n} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i$

d'après la loi forte des grands nombres on sait que:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E(X_1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E(X_1)$$

de plus $\frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$$\Rightarrow \frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} 0$$

EX6 $|X_n+Y_n-(X+Y)| \leq |X_n-X| + |Y_n-Y|$

$$\Rightarrow E(|X_n+Y_n-(X+Y)|) \leq E(|X_n-X|) + E(|Y_n-Y|)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} E(|X_n+Y_n-(X+Y)|) = 0.$$

donc $X_n+Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{moyenne}} X+Y.$