Corrigé TD n° 2

**EX1** $X$ v.a. de Bernoulli de paramètre $p$. $X_1, \dots, X_n$ un $n$-échantillon de $X$. On a :

$$P(X_i = x_i) = \begin{cases} p & \text{si } x_i = 1 \\ 1-p & \text{si } x_i = 0 \end{cases} = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

1) la fonction de vraissemblance est :

$$L(x_1, \dots, x_n, p) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}$$

$$\Rightarrow \ln(L(x_1, \dots, x_n, p)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\ln(1-p)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial p}(\ln(L)) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}{1-p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np}{p(1-p)}$$ , qui s'annule pour $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Eq(*)

par conséquent l'emv est $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

2.) On a $V(T_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} n \cdot p(1-p)$

$$= \frac{p(1-p)}{n}$$

la quantité d'information de Fisher est

$I_n(p) = -E\left[\frac{\partial^2(\ln(L_n))}{\partial p^2}\right]$ or $\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial p^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p^2} - \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-p)^2}$

$X(\Omega) = \{0, 1\}$ indépendant de $p$. $\left\{ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} \right|_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} = -\frac{np}{p^2} - \frac{n-np}{(1-p)^2}$

$= \frac{-n}{p(1-p)} < 0$

d'où $I_n(p) = \frac{np}{p^2} + \frac{n-np}{(1-p)^2} = n\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right] = \frac{n}{p(1-p)}$

on a $V(T_n) = \frac{1}{I_n(p)}$ $\Rightarrow$ $T_n$ est un estimateur efficace de p.

EX2 X une v.a. de Poisson de paramètre m.

on sait que $P(X=k) = e^{-m}\frac{m^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

1) la fonction de vraissemblance est :

$$L(k_1,..,k_n, m) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = k_i, m) = \prod_{i=1}^{n} e^{-m}\frac{m^{k_i}}{k_i!}$$

$$= e^{-nm}\frac{m^{k_1+..+k_n}}{k_1!\dots k_n!}$$

$$\Rightarrow \ln L = -nm + (k_1+..+k_n)\ln m - \sum_{i=1}^{n}\ln(k_i!)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial m} = -n + (k_1+..+k_n)\cdot\frac{1}{m}$$

d'où $\frac{\partial \ln L}{\partial m} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$

et $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} = -\frac{k_1+..+k_n}{m^2} < 0 \quad \forall m$

donc $\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ est une estimation du maximum de vraissemblance.

l'estimateur du maximum de vraissemblance est

donc $\Pi_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n$

b) $V(\Pi_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{n\, m}{n^2} = \frac{m}{n}$

on a $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2} = -(k_1 + \dots + k_n) \frac{1}{m^2}$

or $I_n(m) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2}\right) = \frac{1}{m^2} \sum E(X_i) = \frac{n\, m}{m^2} = \frac{n}{m}$

car $X(\Omega) = \mathbb{N}$ indep. de m.

on a $V(\Pi_n) = \frac{1}{I_n(m)}$ donc $\Pi_n$ est un estimateur efficace de m.

EX3 X v.a dont la fonction de densité est

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$
$v' = e^{-\frac{x}{\lambda}} \Rightarrow v = -\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}$

1.) • $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,\lambda)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx =$

$\frac{1}{\lambda}\left[-\lambda x e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx = \left[-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^{+\infty} = \lambda \Rightarrow \boxed{E(X) = \lambda}$

• $V(X) = \lambda^2$ voir (*)

2.) La fonction de vraissemblance est

$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n e^{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\Rightarrow \ln L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = -n \ln(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i$

d'où $\begin{cases} \dfrac{\partial(\ln L)}{\partial\lambda} = -\dfrac{n}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{-n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} \\ \dfrac{\partial^2(\ln L)}{\partial\lambda^2} = \dfrac{n}{\lambda^2} - \dfrac{2}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{n\lambda - 2\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^3} \end{cases}$

ainsi $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}(\ln L) = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

et $\left.\dfrac{\partial^2(\ln L)}{\partial\lambda^2}\right|_{\tilde{\lambda}} = -\dfrac{n}{\lambda^2} < 0$

l'estimateur du maximum de vraissemblance est

alors $\tilde{\Lambda} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

3°) • $E(\tilde{\Lambda}) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \dfrac{1}{n} n\lambda = \lambda$.

• $V(\tilde{\Lambda}) = \dfrac{1}{n^2} n\lambda^2 = \dfrac{\lambda^2}{n}$

(*) $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ or $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,\lambda)\,dx = 2\lambda^2$

$\Rightarrow V(X) = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2$

Rq $\hat{\Lambda}$ est un estimateur sans biais convergent

en Proba.

4°) $I_n(\lambda) = -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda^2}\right)$

or $E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda^2}\right) = E\left(\dfrac{n}{\lambda^2}\right) - \dfrac{2}{\lambda^3} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \dfrac{n}{\lambda^2} - \dfrac{2}{\lambda^3} n\lambda$

$= -\dfrac{n}{\lambda^2} \Rightarrow$

$V(\tilde{\Lambda}) = \dfrac{1}{I_n(\lambda)} \Rightarrow \tilde{\Lambda}$ est un estimateur efficace de $\lambda$.

EX4 soit $X$ une v.a. dont la fonction densité ③

est $f(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}$ ; $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ ; $N(\mu,\sigma^2) \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

a) $X$ est une variable Gaussienne qui suit la loi normale $N(0,\lambda)$ donc $E(X)=0$ et $V(X)=\lambda$

$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

b) $E(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f(x,\lambda)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}\,dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^3}_{u} \underbrace{x e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}}_{v'}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left\{ \left[-\lambda x^3 e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 3\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}\,dx \right\}$

$u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2$

$v' = x e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} \Rightarrow v = -\lambda e^{-\frac{x^2}{2\lambda}}$

$= 3\lambda E(X^2) = 3\lambda\left[E(X^2) - (\underbrace{E(X)}_{0})^2\right] = 3\lambda V(X) = 3\lambda.\lambda = 3\lambda^2$

c) la fonction de vraisemblance est :

$L(x_1,\dots,x_n,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\lambda) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$\Rightarrow \ln L = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\lambda - \frac{1}{2\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\lambda}(\ln L) = -\frac{n}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(\ln(L)) = \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$

Alors $\frac{\partial}{\partial\lambda}(\ln L) = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

et $\left.\frac{\partial^2(\ln(L))}{\partial\lambda^2}\right|_{\tilde{\lambda}} = -\frac{n}{2\tilde{\lambda}^2} < 0$

Par conséquent, l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\lambda$ est $\tilde{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$.

d) On a • $E(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = E(X_i^2) - \underbrace{(E(X_i))^2}_{0} = V(X_i) = \lambda$

• $V(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i^2) = \frac{V(X^2)}{n} = \frac{1}{n}\left[E(X^4) - \underbrace{(E(X^2))^2}_{(E(X))^2}\right]$

$= \frac{1}{n}\left[3\lambda^2 - \lambda^2\right] = \frac{2\lambda^2}{n}$.

La quantité d'information de Fisher est

$I_n(\lambda) = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(\ln L)\right]$ car $X(\Omega) = \mathbb{R}$ indép. de $\lambda$.

or $E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(\ln L)\right] = \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) = \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{n}{\lambda^3}E(X^2)$

$= \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{n}{\lambda^3}V(X) = \frac{n}{2\lambda^2} - \frac{n\lambda}{\lambda^3} = -\frac{n}{2\lambda^2}$

$\Rightarrow V(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{I_n(\lambda)}$ donc $\tilde{\lambda}$ est un estimateur efficace de $\lambda$.