

**TD Processus à sauts et applications**

**2. Statistiques d'ordre - Order statistics.**

**Exercice 1** Soient  $U_1, U_2, \dots, U_n$  i.i.d. et uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ . (*Let  $U_1, U_2, \dots, U_n$  i.i.d. be uniform random variables, uniformly distributed on  $[a, b]$ .*)

1. Montrer que pour tout  $k \neq l$ ,  $P(U_k = U_l) = 0$ . En déduire que  $P(U_k \neq U_l \forall k \neq l, k, l \leq n) = 1$ .  
*Show that for all  $k \neq l$ ,  $P(U_k = U_l) = 0$ . Deduce from this that  $P(U_k \neq U_l \forall k \neq l, k, l \leq n) = 1$ .*
2. On peut donc arranger les  $n$  valeurs  $U_1, U_2, \dots, U_n$  de manière strictement croissante : On pose

$$V_1 = \min\{U_i, i \leq n\}, V_2 = \min(\{U_i, i \leq n\} \setminus V_1), \dots, V_n := \max\{U_i, i \leq n\}.$$

*Hence we may arrange the  $n$  values  $U_1, U_2, \dots, U_n$  in a strictly increasing manner*

$$V_1 = \min\{U_i, i \leq n\}, V_2 = \min(\{U_i, i \leq n\} \setminus V_1), \dots, V_n := \max\{U_i, i \leq n\}.$$

Donc (*Thus*):

$$V_1 < V_2 < \dots < V_n$$

et  $\{V_1, \dots, V_n\} = \{U_1, \dots, U_n\}$ . Calculer la loi jointe des  $(V_1, \dots, V_n)$ .  
*Give the joint law of  $(V_1, \dots, V_n)$ !*

3. Donner en particulier la densité de  $V_1$  et de  $V_n$ .  
*Give the precise form of the probability density of  $V_1$  and of  $V_n$ .*

**Exercice 2**

Même notation que dans l'exercice 1. Soient maintenant  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  i.i.d. des variables exponentielles de paramètre  $\lambda > 0$ . On pose  $T_k := \tau_1 + \dots + \tau_k$ . Soient  $n$  et  $t$  fixés et  $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction bornée. Montrer que

$$E[f(T_1, \dots, T_n) | T_n \leq t < T_{n+1}] = E[f(V_1, \dots, V_n)].$$

Autrement dit : La loi conditionnelle de  $(T_1, \dots, T_n)$ , sachant que  $T_n \leq t < T_{n+1}$  est la même que celle de la statistique d'ordre de  $n$  uniformes sur  $[0, t]$ .

**Indication :**  $P(T_n \leq t < T_{n+1}) = P(N_t = n) = \dots$

*Same notation as in exercise 1. Let  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  i.i.d. be exponentially distributed random variables with parameter  $\lambda > 0$ . Let  $T_k := \tau_1 + \dots + \tau_k$ . Fix  $n$  and  $t$  and let  $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  be a bounded function. Show that*

$$E[f(T_1, \dots, T_n) | T_n \leq t < T_{n+1}] = E[f(V_1, \dots, V_n)].$$

*In other words : the conditional law of  $(T_1, \dots, T_n)$ , knowing  $T_n \leq t < T_{n+1}$ , is the same as the law of the order statistics of  $n$  uniform random variables on  $[0, t]$ .*

*Hint : Use  $P(T_n \leq t < T_{n+1}) = P(N_t = n) = \dots$*