CY Tech (EISTI), ING1 GM, 2019-2020

TD01 - Probabilités Avancées
Vecteurs aléatoires

Exercice 1 : Considérons un vecteur aléatoire $(Z_1, Z_2) =: Z$ tel que $Z_1(\Omega) = Z_2(\Omega) = \{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}(Z = (0,0)) = (1-p)^2, \quad \mathbb{P}(Z = (1,1)) = p^2,$$

et

$$\mathbb{P}(Z = (0,1)) = \mathbb{P}(Z = (1,0)) = p(1-p),$$

où $p \in]0,1[$. Montrer que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

Exercice 2 : Soient X et Y deux v.a. t.q. (X,Y) admette une fonction de densité conjointe $f_{(X,Y)}$ définie par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c(2x+y)\mathbf{1}_{]2,6[\times]0,5[}(x,y).$$

1) Que vaut c ?

2) Trouvez les fonctions de répartitions marginales F_X et F_Y.

3) Trouver les fonctions de densités marginales f_X et f_Y.

4) Calculer $\mathbb{P}(X > 3, Y > 2)$, $\mathbb{P}(X > 3)$ et $\mathbb{P}(X + Y < 4)$.

5) Soient $x > 6$ et $y \in]0,5[$, calculer $F_{(X,Y)}(x,y)$ et $f_{(X,Y)}(x,y)$. En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 : Soient X et Y deux v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ où $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. Calculer $f_{(U,V)}(u,v)$ où $(U,V) = (X+Y, X-Y)$.

Exercice 4 :

Soit (X,Y,Z) un vecteur aléatoire de dimension 3 admettant une densité $f_{(X,Y,Z)}$ définie par :

$$f_{(X,Y,Z)}(x,y,z) = \frac{1 - \prod_{w\in\{x,y,z\}} \sin(w)}{8\pi^3} \mathbf{1}_{[0,2\pi[^3}(x,y,z)$$

Montrer que X, Y, Z sont 2 à 2 indépendants mais pas indépendants.

Exercice 5 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes avec X de loi normale centrée réduite (i.e. $f_X(x) = (2\pi\exp(x^2))^{-1/2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et Y de loi Gamma de paramètre $\alpha = n/2$ et $\beta = 1/2$ avec $n \in \mathbb{N}$[¶]).

Quelle est la loi de $Z = \sqrt{n}\frac{X}{\sqrt{Y}}$?

¶. i.e. $f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}$ pour tout $y \in [0,+\infty[$. C'est aussi la loi du χ^2 à n degrés de liberté, i.e. loi de $\sum_{i=1}^k Y_i^2$ où $(Y_i)_{1\le i\le k}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. de loi normale centrée réduite.