**CY Tech (EISTI), ING1 GM, 2019-2020**

**TD02 - Probabilités Avancées**
**Vecteurs aléatoires la suite**

**Exercice 1** : Soient le vecteur aléatoire gaussien $(X_1,X_2,X_3)'$ et $a \in \mathbb{R}$. Les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, $X_3$ sont supposées telles que

$$\begin{aligned}&\text{pour } i = 1,2,3, X_i \text{ suit une loi } \mathcal{N}(i,i^2)\\ &\text{pour } j \neq k, \mathbb{C}\text{ov}(X_j,X_k) = ajk.\end{aligned}$$

1. Donner la matrice de covariance de $(X_1,X_2,X_3)'$.

2. Quel est l'ensemble des valeurs possibles du réel $a$ ?

**Exercice 2** : Soient $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $X = (X_1,\dots,X_n)'$ un vecteur aléatoire où on suppose que $X_1, X_2 - X_1, \dots, X_n - X_{n-1}$ sont indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Déterminer $\text{Cov}(X)$ la matrice variance-covariance de $X$.

**Exercice 3**

Soient $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ et $Y \sim \text{Geom}(\mu)$.

On pose $Z = aX - Y$ et $U = bX - 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.

Trouver $\text{Cov}(X,Y)$ lorsque $\text{Cov}(Z,U) = 0$.

**Exercice 4–pour ING1 MF** :

Soient $X_1$ et $X_2$ deux v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y_1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$ et $Y = (Y_1,Y_2)$.

1. Montrez que $Y$ est un vecteur aléatoire admettant une densité et trouvez sa fonction de densité.

2. Les variables aléatoires $Y_1$ et $Y_2$ sont-elles indépendantes ?

**Exercice 5–Bonus (sorti à l'examen 2018 2020)** :

Soit $X_1, X_2, X_3$ trois v.a.r. identiquement distribuées, de fonction de densité $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

1. Trouvez la fonction de densité de $(Y_1,Y_2,Y_3)$, où

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3,\ Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2},\ \text{et } Y_3 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}.$$

2. $Y_1$, $Y_2$ et $Y_3$ sont-elles indépendantes ?