EISTI, ING1 GM, 2018-2019

TD05 - Probabilités Avancées
Espérance conditionnelle acte 2

Exercice 1 : Considérons l'exemple du dé où $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$. Soient $\mathscr{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathscr{F}_2 = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \Omega\}$, $\mathscr{F}_3 = \mathscr{P}(\Omega)$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ t.q. $X(i) = \max(i - 4, 0)$.

1. Trouver $\sigma(X)$. X est $\mathscr{F}_3$-mesurable ? $\mathscr{F}_1$-mesurable ? $\mathscr{F}_2$-mesurable ?

2. Calculer $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_i]$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$.

Exercice 2 : Soient X et Y deux v.a. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ telles que $Y \in L^1(\Omega)$ et $XY \in L^1(\Omega)$. Montrer que si X est $\mathscr{G}$-mesurable, où $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$, alors $\mathbb{E}[XY|\mathscr{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$.

Exercice 3 : Soit $X \in L^1(\Omega)$ alors $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \in L^1(\Omega)$.

Exercice 4 : Soit $X \in L^1_+(\Omega)$ p.s. alors $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] \geq 0$ p.s.

Exercice 5 : Soient $X \in L^1(\Omega)$ une v.a. et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*} \in (L^1_+(\Omega))^{\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. croissante telle que $\lim_{n \to +\infty} X_n = X$ p.s. Alors $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ p.s.