EISTI, ING1 GM, 2018-2019

TD06 - Probabilités Avancées
Espérance conditionnelle acte 3

Exercice 1 : Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, telles que $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[Y^2]$ existent.

Montrer que si $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = X$ et $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$ alors $X = Y$ p.s.

Exercice 2 : Soient $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, $X \in L^2(\mathscr{F})$, $Z \in L^2(\mathscr{G})$ et $Y = \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$.

Montrer que

$$\mathbb{E}[|X-Z|^2] = \mathbb{E}[|X-Y|^2] + \mathbb{E}[|Y-Z|^2]$$

en déduire que

$$\mathbb{E}[|X-Y|^2] = \inf_{Z \in L^2(\mathscr{G})} \mathbb{E}[|X-Z|^2].$$

Exercice 3 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre θ. Soit $Z = X + Y$.

1. Montrer que $Z \sim \gamma(2, \theta)$, i.e. $f_Z(z) = \theta^2 z e^{-\theta z} \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}}$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour toute fonction h positive et mesurable,

$$\mathbb{E}[h(X)|Z] = \frac{1}{Z} \int_0^Z h(u)\,du.$$

Exercice 4 : Soient X une v.a.r. qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $Y = 2[X/2]$ où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Calculer $\mathbb{E}[Y|X]$ et $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 5 : Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi du couple (X, Z). En déduire la densité conditionnelle de X sachant Z et $\mathbb{E}[X|Z]$.

Exercice 6 : Soit Y une v.a.r. indépendante et de même loi que X. Calculer $\mathbb{E}[X|(X+Y)]$ et $\mathbb{E}[Y|(X+Y)]$.