

TD07 - Probabilités Avancées
Vecteurs Gaussiens et Espérance Conditionnelle

Exercice 1

Soient X une variable aléatoire de loi normale standard et Z une variable aléatoire discrète indépendante de X .

On suppose que Z est de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ ¹. On pose $Y = ZX$.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire de loi gaussienne standard.²

2. Considérant $X + Y$, montrer que (X, Y) n'est pas un vecteur gaussien.

3. Montrer que X et Y ne sont pas des variables aléatoires indépendantes, mais que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 2 (posé à l'Examen de 2017)

Soit $U = (X, Y)'$ un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}_2(m, K)$ où $m = (0, 0)'$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $W = X$ et $Z = 2X - Y$.

1. Trouver la loi de $(W, Z)'$.

2. Exprimer Y en fonction de W et Z .

3. Montrer que $\mathbb{E}[X^2Y | (2X - Y)]$ existe et calculer la.

Exercice 3 Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)'$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}_4(m_X, V_X)$ où $m_X = 0_{\mathbb{R}^4}$ et

$$V_X = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ par $Y_1 = 5X_1 + X_2 + \beta X_3 + \alpha X_4$, $Y_2 = X_1 - X_2 + X_4$, $Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3$.

1. Déterminer la loi de Y .

2. Pour quelles valeurs de α et β , Y_1, Y_2, Y_3 sont-elles indépendantes ?

Sous cette condition, calculer $\mathbb{E}[Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2]$.

Exercice 4

Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer la loi de $U := \sum_{i=1}^3 X_i$.

2. Montrer que $W := X - Y$ est indépendante de U .

Exercice 5

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vecteur gaussien $\mathcal{N}_3(m_X, V_X)$ où $m_X = 0$ et

$$V_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On définit le vecteur $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ par $Y_1 = X_1 + X_3$, $Y_2 = \alpha X_1 + 2X_2 + \beta X_3$, $Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3$.

1. Déterminer la loi de Y

2. Pour quelles valeurs de α et β , $(Y_1$ et $Y_2)$ et $(Y_2$ et $Y_3)$ sont-elles indépendantes ?

3. Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_3) .

Rappel :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (à faire soi-même) : Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité $f_{(X, Y)}$. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (U, V) . En déduire la densité conditionnelle de U sachant V .

Astuce : $F_{(U, V)}(u, v) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{U \leq u, V \leq v, X \leq Y}] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{U \leq u, V \leq v, Y \leq X}]$.

¹i.e. $\mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = 1)$.

²Indication: ne pas utiliser la formule de transformation d'un couple de variables aléatoires mais plutôt les notions de conditionnement et d'indépendance.