

**EISTI, GM ING1, Examen du Mercredi 6 Juin 2018**  
**Probabilités Avancées**

**Règles :** les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées. Seule une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée.

Soient  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Pour deux vecteurs aléatoires réelles  $X$ , de dimension  $n$  et  $Y$  de dimension  $m$ , tel que  $(X, Y)$  admet une densité de probabilité  $f_{(X,Y)}$ .

L'expression  $\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$  nous permet de définir une fonction et donc pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^m$  on définit  $f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \mathbf{1}_{B_{f_Y}}(y)$ , où  $B_{f_Y} := \{y \in \mathbb{R}^m, f_Y(y) > 0\}$ .

Lorsqu'une variable aléatoire continue  $X$ , définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  admet une fonction de densité, elle sera notée par  $f_X$ .

Soit  $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq a \leq b\}$ .

**Exercice 1**

On considère le vecteur aléatoire  $(X, Y)$  de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (y-x)e^{-y} \mathbf{1}_A(x,y), \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer les densités marginales  $f_X$  et  $f_Y$  de  $X$  et  $Y$  respectivement.

$(X, Y)$  admet une fonction de densité  $f_{(X,Y)}$ , donc  $f_X$  et  $f_Y$  existent et on a  $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y) dy$  et  $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y) dx$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Donc pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f_X(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \int_x^{+\infty} (y-x)e^{-y} dy = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) [y - e^{-y} - e^{-y} + xe^{-y}]_x^{+\infty}$  et  $f_Y(y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \int_0^y (y-x)e^{-y} dx = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y) e^{-y} [yx - \frac{x^2}{2}]_0^y$ , i.e.

$$f_X(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \text{ et } f_Y(y) = \frac{1}{2} y^2 e^{-y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Petite vérification :

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y} dy = [(\frac{1}{2} y^2 + y + 1) e^{-y}]_{+\infty}^0 = 1.$$

2. En déduire que pour tous réels  $x$  et  $y$  on a  $f_{X|Y}(x,y) = 2(y-x)y^{-2} \mathbf{1}_A(x,y)$ .

L'ensemble des points  $y \in \mathbb{R}$  tels que  $f_Y(y) = 0$  est  $\{0\}$  d'où pour tous  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$  on a  $f_{X|Y}(x,y) = \frac{(y-x)e^{-y} \mathbf{1}_A(x,y)}{\frac{1}{2} y^2 e^{-y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)}$ , i.e.

$$f_{X|Y}(x,y) = 2(y-x)y^{-2} \mathbf{1}_A(x,y), \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*.$$

3. Calculer  $\mathbb{E}[X|Y]$ .

$X \in L^1(\Omega)$ , en effet  $\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = 1 < +\infty$ , donc  $\mathbb{E}[X|Y]$  existe d'après le Théorème d'existence d'espérance conditionnelle.

Or une autre propriété du cours dit que lorsque  $(X, Y)$  admet une densité de probabilité  $f_{(X,Y)}$  avec  $h(X)$  intégrable, où  $h$  est borélienne on a  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[h(X)|Y] = \phi(y)$  où  $\phi(y) =$

$\frac{\int_{\mathbb{R}} h(x) f_{(X,Y)}(x,y) dx}{f_Y(y)}$ . Comme  $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x,y) dx = \int_0^y 2x(y-x)y^{-2} dx = [x^2 y^{-1} - \frac{2}{3} x^3 y^{-2}]_0^y = \frac{1}{3} y$ , d'où

$$\mathbb{E}[X|Y] = \frac{1}{3} Y.$$

4. Calculer  $f_{Y|X}(x,y)$  et montrer que  $\mathbb{E}[Y|X] = X + 2$ .

Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $f_{Y|X}(x,y) = (y-x)e^{x-y} \mathbf{1}_A(x,y)$ . D'après le cours  $\mathbb{E}[Y|X]$  existe, en effet  $Y \in L^1$  (car  $\mathbb{E}[|Y|] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} y^3 e^{-y} dy = \frac{1}{2} \times 3! < +\infty$ ), donc  $\mathbb{E}[Y|X] = \psi(X)$  où  $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(x,y) dy = \int_x^{+\infty} y(y-x)e^{x-y} dy = [-y^2 + xy + x - 2y - 2]_x^{+\infty} = x + 2$ . Finalement on a bien

$$\mathbb{E}[Y|X] = \psi(X) = X + 2.$$

5. On considère le couple aléatoire  $(U, V) = (X, Y - X)$ .

a. Déterminer la loi du couple  $(U, V)$ .

Soit  $\psi : D \rightarrow \Delta$  telle que  $\psi(x,y) = (x, y-x)$  pour tous  $x, y \in D$ , où  $D := \mathbb{R}^2$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\Delta := \mathbb{R}^2$  alors on a  $\psi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme et  $\psi^{-1}(u,v) = (u, u+v)$ .  $(X, Y) \in D$  p.s. et donc d'après le cours  $(U, V)$  admet une fonction de densité  $f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\psi^{-1}(u,v)) |\det(J(\psi^{-1})(u,v))|$  pour tous  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Or  $J(\psi^{-1})(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} u & \frac{\partial}{\partial v} u \\ \frac{\partial}{\partial u} (u+v) & \frac{\partial}{\partial v} (u+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , donc  $f_{(U,V)}(u,v) = ((u+v) - u) e^{-(u+v)} \mathbf{1}_A(u, u+v)$  pour tous  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Finalement

$$f_{(U,V)}(u,v) = v e^{-u-v} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(u,v), \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Vérification rapide :  $\int_{\mathbb{R}^2} f_{(U,V)}(u,v) du dv = 1$ .

b. En déduire la loi de  $Y - X$ .

On a  $V = Y - X$  et donc pour tout  $v \in \mathbb{R}$ ,  $f_{(Y-X)}(v) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v) \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v) du$ , i.e.

$$f_{(Y-X)}(v) = v e^{-v} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v).$$

## Exercice 2

Soit  $X$  une variable aléatoire uniforme sur  $[0, 1]$ . On considère

$$Y = \mathbf{1}_{X \leq 1/2}, Y_1 = X \text{ et } Y_2 = X(1/2 - X).$$

1. Montrer que si  $Z$  est une variable aléatoire bornée dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  alors  $Z$  est  $\mathbb{P}$ -intégrable.

Soit  $Z$  une v.a. bornée, alors il existe  $C \in \mathbb{R}_+$  tel que  $|Z| \leq C$  presque-sûrement, donc  $\mathbb{E}[|Z|] = \int_{\Omega} |Z(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_{\Omega} C d\mathbb{P}(\omega) = C \mathbb{P}(\Omega) = C < +\infty$ , donc  $Z$  est  $\mathbb{P}$ -intégrable.

2. Rappeler la définition de  $\mathbb{E}[Y_1|Y]$  et de  $\mathbb{E}[Y_2|Y]$ , puis montrer qu'elles existent.

En posant  $U_1 = \mathbb{E}[Y_1|Y]$  et  $U_2 = \mathbb{E}[Y_2|Y]$  et en utilisant les définitions vues en cours on a par définition :

Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $U_i$  est une variable aléatoire telle que  $U_i$  est  $\sigma(Y)$ -mesurable et pour tout  $A \in \sigma(Y)$ ,  $\mathbb{E}[U_i \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_A]$ .

D'après le Théorème d'existence d'espérance conditionnelle, il suffit que  $Y_1$  et  $Y_2$  soient intégrables. Mais d'après la précédente question, il suffit que  $Y_1$  et  $Y_2$  soient bornées, ce qui est le cas, en effet comme  $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$  on obtient que  $|Y_1| = |X| \leq 1$  p.s. et que  $|Y_2| = |X(1/2 - X)| \leq 1(1/2 + 1) = 3/2$ .

**3. Montrer que  $Y$  est une variable aléatoire discrète.**

Pour tout  $\omega \in \Omega$  t.q.  $X(\omega) \leq 1/2$  on a  $Y(\omega) = 1$  et pour tout  $\omega \in \Omega$  t.q.  $X(\omega) > 1/2$  on a  $Y(\omega) = 0$ , donc avec  $\{X \leq 1/2\} \cup \{X > 1/2\} = \Omega$  on obtient que  $Y(\omega) \in \{0, 1\}$  pour tout  $\omega \in \Omega$ , finalement  $Y$  est une variable aléatoire à valeurs  $\{0, 1\}$ , donc  $Y$  est une v.a. discrète.

**4. En utilisant le conditionnement sur une variable aléatoire discrète, montrer que**

$$\mathbf{a.} \quad \mathbb{E}[Y_1|Y] = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{Y=0\}},$$

On doit trouver l'expression de  $U_1 = \mathbb{E}[Y_1|Y]$ , comme  $Y_1$  est une v.a. discrète à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , on obtient donc  $U_i = \mathbb{E}[Y_i|Y] = \mathbb{E}[Y_i|\{Y=0\}]\mathbf{1}_{\{Y=0\}} + \mathbb{E}[Y_i|\{Y=1\}]\mathbf{1}_{\{Y=1\}}$ , i.e.  $U_i = \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=0\}}]}{\mathbb{P}(Y=0)} + \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=1\}}]}{\mathbb{P}(Y=1)}$ .

Or on a  $\{Y=1\} = \{X \leq 1/2\}$  et  $\{Y=0\} = \{X > 1/2\}$  et donc on a les simplifications suivantes  $k_i^1 := \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=1\}}]}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{X \leq 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X \leq 1/2)}$  et  $k_i^0 := \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=0\}}]}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{X > 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X > 1/2)}$ . D'où  $U_i = k_i^1 \mathbf{1}_{\{Y=1\}} + k_i^0 \mathbf{1}_{\{Y=0\}}$ .

Par conséquent  $k_1^1 = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \leq 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X \leq 1/2)} = \frac{\int_0^{1/2} x dx}{1/2} = \frac{1}{4}$  et  $k_1^0 = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X > 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X > 1/2)} = \frac{\int_{1/2}^1 x dx}{1-1/2} = \frac{3}{4}$ .

Donc on a bien  $\mathbb{E}[Y_1|Y] = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$ .

$$\mathbf{b.} \quad \mathbb{E}[Y_2|Y] = \frac{1}{24}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} - \frac{5}{24}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}.$$

Et donc  $k_2^1 = \frac{\mathbb{E}[X(1/2-X)\mathbf{1}_{\{X \leq 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X \leq 1/2)} = \frac{\int_0^{1/2} x(1/2-x) dx}{1/2} = \frac{1}{24}$  et  $k_2^0 = \frac{\mathbb{E}[X(1/2-X)\mathbf{1}_{\{X > 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X > 1/2)} = \frac{\int_{1/2}^1 x(1/2-x) dx}{1/2} = -\frac{5}{24}$ .

Donc on a bien  $\mathbb{E}[Y_2|Y] = \frac{1}{24}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} - \frac{5}{24}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$ .

### Exercice 3

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Soit  $\mathcal{G}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ .

Soit  $L_{\mathcal{G}}^2 = L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ , i.e. l'espace des v.a. de carrés intégrables et  $\mathcal{G}$ -mesurables. On définit  $X \in L_{\mathcal{F}}^2$  et  $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ .

**1. Montrer que pour tout  $Z \in L_{\mathcal{G}}^2$ , on a  $\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] + \mathbb{E}[(Y-Z)^2]$ .**

Soit  $Z \in L_{\mathcal{G}}^2$ . On a  $\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y+Y-Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] + \mathbb{E}[(Y-Z)^2] + 2\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)]$ .

Donc montrons que  $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)] = 0$ . Avec la propriété de la double espérance on a  $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}]]$  où  $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}]$  existe, en effet  $|\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}]| \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X-Y)^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(Y-Z)^2] \leq \frac{1}{2}2\mathbb{E}[X^2 + Y^2] + \frac{1}{2}2\mathbb{E}[Y^2 + Z^2] < +\infty$ .

On sait  $Y$  et  $Z$  sont  $\mathcal{G}$ -mesurables, donc  $Y-Z$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable, d'où  $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}] = (Y-Z)\mathbb{E}[(X-Y)|\mathcal{G}]$ . De plus  $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  implique  $\mathbb{E}[(X-Y)|\mathcal{G}] = 0$ , finalement  $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}] = 0$ , i.e.  $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)] = 0$  et cqfd.

**Astuce** : Utiliser la propriété de la double espérance (la tour)<sup>1</sup>.

2. En déduire que

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \inf_{W \in L^2_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[(X - W)^2].$$

Et donc  $\inf_{W \in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - W)^2] = \inf_{W \in L^2(\mathcal{G})} (\mathbb{E}[(X - Y)^2] + \mathbb{E}[(Y - W)^2])$ . Comme tout est positif avec  $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$  qui ne contient pas de terme en  $W$  et que  $Y$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable (par définition de  $Y$ ) et que  $Y \in L^2(\mathcal{G})$ , d'où  $\inf_{W \in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - W)^2] = \mathbb{E}[(X - Y)^2] + \inf_{W \in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(Y - W)^2] = \mathbb{E}[(X - Y)^2] + \mathbb{E}[(Y - Y)^2]$ , et donc on a bien

$$\inf_{W \in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - W)^2] = \mathbb{E}[(X - Y)^2].$$

#### Exercice 4

Soit  $X = (X_1, X_2)'$  un vecteur gaussien de moyenne  $(0, 0)'$  et de matrice de covariances  $\Gamma$  où  $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ? Justifier rigoureusement votre réponse.

$(X_1, X_2)$  est un vecteur gaussien donc d'après le cours  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariances du vecteur aléatoire  $(X_1, X_2)$  est diagonale, ce qui n'est pas le cas ici, donc  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

2. Soit  $U = \mathbb{E}[X_1 | X_2]$ . En montrant que  $U$  existe montrer qu'elle admet une fonction de densité  $f_U$ , à expliciter.

Pour que  $U$  existe il suffit d'après le Théorème d'existence d'espérance conditionnelle que  $X_1 \in L^1$ , ce qui est le cas, en effet d'après l'énoncé  $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et donc  $\mathbb{E}[|X_1|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2} dx = 2[-(2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}]_0^{+\infty} = 2 < +\infty$ .

Il est clair que  $(Z, X_2)$  est un vecteur gaussien, en effet  $(X_2, Z)' = A(X_1, X_2)'$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $Z$  et  $X_2$  sont indépendantes si et seulement si  $\text{Cov}(Z, X_2) = 0$ . Comme  $Z = X_1 + aX_2$  et que l'opérateur  $\text{Cov}$  est bilinéaire avec  $\text{Cov}(X_1, X_2) = \sqrt{3}/2$ , d'où  $X_2$  et  $Z$  sont indépendantes si et seulement si  $a = -\frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\text{Cov}(X_2, X_2)}$ , i.e.  $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Donc  $U = \mathbb{E}[Z - aX_2 | X_2] = \mathbb{E}[Z | X_2] - aX_2$  car  $X_2$  est  $\sigma(X_2)$ -mesurable. Comme  $Z$  et  $X_2$  sont indépendantes pour ce  $a$  trouvé, qui est unique, d'où  $U = \mathbb{E}[Z] - aX_2 = 0 - aX_2$ , donc finalement  $U = -aX_2$ ,  $U$  est donc une gaussienne avec  $U \sim \mathcal{N}(0, (-a)^2)$ , et donc admet une densité de probabilité  $f_U$  telle que  $f_U(u) = \frac{e^{-u^2/(2a^2)}}{\sqrt{2\pi a^2}}$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .

**Astuce** : Trouver une constante  $a$  telle que les variables aléatoires  $X_2$  et  $Z$  soient indépendantes, où  $Z = X_1 + aX_2$ .

3. Calculer la fonction caractéristique de  $U$ .

Comme  $U = -aX_2$  et donc pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\phi_U(u) = \mathbb{E}[e^{iuU}] = \phi_{X_2}(-au) = e^{-\frac{1}{2}(-au)^2}$ , i.e.

$$\phi_U(u) = e^{-\frac{a^2 u^2}{2}}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

<sup>1</sup>La propriété de la double espérance (la tour) :

Soit  $E = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité. Pour toute variable aléatoire  $X$  définie sur  $E$ , on a  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]]$  où  $\mathcal{G}$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ .

