

EISTI, GM ING1, Sujet d'Examen Lundi 13 Mai 2019
Probabilités Avancées

Règles : les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être très motivées.

Notations : Lorsqu'une variable aléatoire continue X , définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X et F_X désignera sa fonction de répartition.

Tout vecteur x de \mathbb{R}^n est par défaut un vecteur colonne et x' désigne sa transposée.

Toute variable aléatoire vectorielle X est par défaut représentée en colonne.

Rappel : $3S_n(2) = (2n+1)S_n(1)$ et $S_n(3) = (S_n(1))^2$ où $S_n(j) = \sum_{k=1}^n k^j$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 [5 points]

Soit $n \geq 2$ et soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a.r. i.i.d. gaussiens standards définies toutes sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose $A = \sum_{k=1}^n kX_k$ et $B = \sum_{k=1}^n k^2X_k$.

1. Soit $(U, V)'$ un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^2 avec $\text{cov}(U, V) \neq 0$.

a. [0.75 point] Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que le vecteur aléatoire $(V - aU, U)$ est un vecteur gaussien.

b. [0.75 point] Montrer que $V - aU$ et U sont indépendants si et seulement si $a = \frac{\text{cov}(U, V)}{\text{Var}(U)}$.

2. [1 point] Montrer que $(A, B)'$ est un vecteur gaussien.

3. [2.5 points] En vous aidant des questions précédentes trouver la valeur de $\mathbb{E}[B|A]$.

Exercice 2 [5 points]

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1, i.e. que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ où $c = \exp(-1)$. Soit $Y = \text{pe}((X+1)/3)$ où $\text{pe}(x)$ désigne la partie entière de x .

1. [0.5 point] Vérifier que $\mathbb{E}[X|Y]$ existe.

2. [1.5 point] Calculer $\mathbb{E}[X|\{Y = 0\}]$.

3. [2.5 point] Calculer $\mathbb{E}[X|\{Y = k\}]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. [0.5 point] En déduire $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 3 [5 points]

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité $f_{(X, Y)}$ avec X et Y i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. On pose $F_{(U, V)}$ la fonction de répartition du vecteur aléatoire $(U, V)'$, i.e. par définition $F_{(U, V)}(a, b) = \mathbb{P}(U \leq a, V \leq b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1. [0.5 point] Soient a, b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. Montrer que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U \geq a, V \leq b\}}] = (F_X(a) - F_X(b))^2$.

2. [0.5 point] Soient a, b deux réels. Montrer que lorsque $0 \leq b \leq a$ alors $\{U \leq a, V \leq b\} = \{U \leq b, V \leq b\}$ et lorsque $a \leq b$ on a $\{U \leq a, V \leq b\} \cup \{U \geq a, V \leq b\} = \{V \leq b\}$.

3. [1.5 point] En utilisant les questions 1. et 2. montrer que $F_{(U, V)}(a, b) = F_X(a)(2F_X(b) - F_X(a))\mathbf{1}_{a \leq b} + F_X(b)^2\mathbf{1}_{a > b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ et enfin montrer que $F_{(U, V)}(a, b) = \int_0^a \int_0^b 2f_X(u)f_X(v)\mathbf{1}_{u \leq v} dv du$.

4. [2.5 points] Calculer $\mathbb{E}[UV^2 + 2U^2V + 3|V]$.

Exercice 4 [5 points]

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires i.i.d. de fonction de densité f_X définie par $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ et $Y_3 = \frac{X_1}{Y_1 Y_2}$.

1. [2 points] Trouver une fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui soit $C^1(D; \Delta)$ -difféomorphisme tel que $Y = \phi(X)$ où $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ et $X = (X_1, X_2, X_3)'$, avec D et Δ deux ouverts de \mathbb{R}^3 à trouver.

2. [2.5 points] En déduire une fonction de densité du vecteur aléatoire (Y_1, Y_2, Y_3) .

3. [0.5 point] Y_1, Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

Règles : les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être très motivées.

Notations : Lorsqu'une variable aléatoire continue X , définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X et F_X désignera sa fonction de répartition.

Tout vecteur x de \mathbb{R}^n est par défaut un vecteur colonne et x' désigne sa transposée.

Toute variable aléatoire vectorielle X est par défaut représentée en colonne.

Rappel : $3S_n(2) = (2n + 1)S_n(1)$ et $S_n(3) = (S_n(1))^2$ où $S_n(j) = \sum_{k=1}^n k^j$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 [5 points]

Soit $n \geq 2$ et soit $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de v.a.r. i.i.d. gaussiens standards définies toutes sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose $A = \sum_{k=1}^n kX_k$ et $B = \sum_{k=1}^n k^2X_k$.

1. Soit $(U, V)'$ un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^2 avec $\text{cov}(U, V) \neq 0$.

a. [0.75 point] Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que le vecteur aléatoire $(V - aU, U)$ est un vecteur gaussien.

Solution: $(V - aU, U)$ est un vecteur gaussien, en effet $\alpha(V - aU) + \beta U$ est une combinaison linéaire de U et V . On peut aussi se baser sur une propriété du cours en disant que $(V - aU, U)' = M(U, V)'$ avec $M = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $(V - aU, U)$ est un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}_2(M\mu_{(U,V)}, M\sigma_{(U,V)}M')$.

b. [0.75 point] Montrer que $V - aU$ et U sont indépendants si et seulement si $a = \frac{\text{cov}(U, V)}{\text{var}(U)}$.

Solution: Donc en utilisant la propriété du cours, on obtient que $V - aU$ et U sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(V - aU, U) = 0$, i.e. (par bilinéarité de cov) ssi $\text{cov}(V, U) - a\text{cov}(U, U) = 0$ ssi

$$a = \frac{\text{cov}(U, V)}{\text{var}(U)}.$$

Donc remarquons qu'il faut que $\text{var}(U) \neq 0$, et $\text{cov}(U, V) \neq 0$, en effet si ce dernier était égale à 0, alors on aurait $a\text{var}(U) = 0$ qui n'est pas du tout intéressant, et donc $\text{cov}(U, V) \neq 0$ est nécessaire et $\text{var}(U) \neq 0$ également (pour la division).

2. [1 point] Montrer que $(A, B)'$ est un vecteur gaussien.

Solution: On a $(A, B)' = M_n Y_n$ où $Y_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ où $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 \end{pmatrix}$; or d'après le cours la suite $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ de v.a.r. gaussiens qui sont indépendantes implique que Y_n est un vecteur aléatoire gaussien, de loi $\mathcal{N}_n(\mu_{Y_n}, \sigma_{Y_n}^2)$ où $\mu_{Y_n} = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])'$ et $\sigma_{Y_n}^2 = (\text{var}(X_i)\delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$; d'où $M_n Y_n = (A, B)'$ est un vecteur aléatoire gaussien.

3. [2.5 points] En vous aidant des questions précédentes trouver la valeur de $\mathbb{E}[B|A]$.

Solution: Comme (A, B) est un vecteur gaussien, d'où d'après la question précédente $B = B - aA + aA$ où $a = \frac{\text{cov}(A, B)}{\text{var}(A)}$. D'où $\mathbb{E}[B|A] = \mathbb{E}[(B - aA) + aA|A] = aA + \mathbb{E}[B - aA|A]$ car A est $\sigma(A)$ -mesurable, et donc $\mathbb{E}[B|A] = aA + \mathbb{E}[B - aA]$, en effet, $B - aA$ et A sont indépendantes.

Or $\mathbb{E}[B - aA] = 0$ et $a = \frac{\sum_{k=1}^n k \times k^2}{\sum_{k=1}^n k^2}$, d'où

$$\mathbb{E}[B|A] = \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}A.$$

Exercice 2 [5 points]

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre 1, i.e. que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k!}$ où $c = \exp(-1)$. Soit $Y = \text{pe}((X + 1)/3)$ où $\text{pe}(x)$ désigne la partie entière de x .

1. [0.5 point] Vérifier que $\mathbb{E}[X|Y]$ existe.

Solution: D'après le cours la variable aléatoire réelle (discrète car Y est discrète) $\mathbb{E}[X|Y]$, c'est-à-dire $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$ existe si X est intégrable c'est-à-dire si $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$, or $X \geq 0$ et $\mathbb{E}[X] = \lambda = 1 < +\infty$, d'où X est bien intégrable et donc $\mathbb{E}[X|Y]$ existe.

2. [1.5 point] Calculer $\mathbb{E}[X|\{Y = 0\}]$.

Solution: D'après le cours on sait que si $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$ alors $\mathbb{E}[X|\{Y = 0\}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=0\}}]}{\mathbb{P}(Y=0)}$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $Y(\omega) = 0$ d'où grâce à la définition de de $Y(\omega)$ et à la partie entière on a $Y(\omega) \leq \frac{X(\omega)+1}{3} < Y(\omega) + 1$, d'où $-1 \leq X(\omega) < 2$ i.e.

$X(\omega) \in \{0, 1\}$, et donc $\{Y = 0\} = \{X = 0\} \cup \{X = 1\}$ et $\mathbb{E}[X|\{Y = 0\}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=0\}}]}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{\sum_{j=0}^1 j \mathbb{P}(X=j)}{\sum_{j=0}^1 \mathbb{P}(X=j)} = \frac{\sum_{j=0}^1 \frac{j}{j!}}{\sum_{j=0}^1 \frac{1}{j!}}$ finalement on a $\mathbb{E}[X|\{Y = 0\}] = \frac{1}{2}$.

3. [2.5 point] Calculer $\mathbb{E}[X|\{Y = k\}]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Solution: Avec le même raisonnement on obtient que $\{Y = k\} = \{X = 3k - 1\} \cup \{X = 3k\} \cup \{X = 3k + 1\}$ (en effet $3k - 1 \geq 0$) d'où $\mathbb{E}[X|\{Y = k\}] = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=k\}}]}{\mathbb{P}(Y=k)} = \frac{\sum_{j=3k-1}^{3k+1} j \mathbb{P}(X=j)}{\sum_{j=3k-1}^{3k+1} \mathbb{P}(X=j)} = \frac{(3k-1)(3k)(3k+1) + (3k)(3k+1) + (3k+1)}{(3k)(3k+1) + (3k+1) + 1} = (3k + 1) \cdot \frac{(3k)^2 + 1}{(3k+1)^2 + 1}$ on constate que lorsque $k = 0$ cette expression donne $\frac{1}{2}$.

4. [0.5 point] En déduire $\mathbb{E}[X|Y]$.

Solution: D'après le cours on sait que lorsque Y est discrète à valeurs dans E alors $\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{k \in E} \mathbb{E}[X|\{Y = k\}] \mathbf{1}_{\{Y=k\}}$. Or ici $E = \mathbb{N}$, en effet grâce à la définition de Y (la partie entière) on sait que $Y(\omega) \in \mathbb{N}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Finalement $\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{k \in \mathbb{N}} (3k + 1) \cdot \frac{(3k)^2 + 1}{(3k+1)^2 + 1} \mathbf{1}_{\{Y=k\}}$ c'est-à-dire $\mathbb{E}[X|Y] = \sum_{k \in \mathbb{N}} f(3k + 1) \mathbf{1}_{\{Y=k\}}$ où $f(j) = j \cdot \frac{(j-1)^2 + 1}{j^2 + 1}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 [5 points]

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité $f_{(X,Y)}$ avec X et Y i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. On pose $F_{(U,V)}$ la fonction de répartition du vecteur aléatoire (U, V) , i.e. par définition $F_{(U,V)}(a, b) = \mathbb{P}(U \leq a, V \leq b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$.

1. [0.5 point] Soient a, b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. Montrer que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U \geq a, V \leq b\}}] = (F_X(a) - F_X(b))^2$.

Solution: Soient $0 \leq a \leq b$. On sait que $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U \geq a, V \leq b\}}] = \mathbb{P}(\min(X, Y) \geq a, \max(X, Y) \leq b)$, or $\{\min(X, Y) \geq a\} = \{X \geq a, Y \geq a\}$ et $\{\max(X, Y) \leq b\} = \{X \leq b, Y \leq b\}$ d'où $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{U \geq a, V \leq b\}}] = \mathbb{P}(X \in [a, b], Y \in [a, b])$. Or X et Y sont indépendantes, avec $[a, b]$ un borélien, et ont la même loi d'où $\mathbb{P}(X \in [a, b], Y \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b])\mathbb{P}(Y \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b])^2$. Le fait que la loi exponentielle soit continue implique que $\mathbb{P}(X = a) = 0$ d'où $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$, finalement l'affirmation était vraie.

2. [0.5 point] Soient a, b deux réels. Montrer que lorsque $0 \leq b \leq a$ alors $\{U \leq a, V \leq b\} = \{U \leq b, V \leq b\}$ et lorsque $a \leq b$ on a $\{U \leq a, V \leq b\} \cup \{U \geq a, V \leq b\} = \{V \leq b\}$.

Solution: Soient deux réels $0 \leq b \leq a$. Alors pour $\omega \in \Omega$ tel que $U(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega)) \leq a$ et $V(\omega) = \max(X(\omega), Y(\omega)) \leq b$ alors on a avec $\min \leq \max \leq b \leq a$ on obtient $\min(X(\omega), Y(\omega)) \leq b$ et $\max(X(\omega), Y(\omega)) \leq b$, de même on a l'autre inclusion.

Soient deux réels $0 \leq a \leq b$. Tout d'abord remarquons que si on avait $a > b$ sachant $\{\max(X, Y) \leq b\}$ l'événement $\{U > a\}$ serait de mesure nulle (en effet obtient $\max(X, Y) \leq b < a < \min(X, Y)$ p.s.), donc on écrit $\{V \leq b\} = \{V \leq b\} \cap \Omega = \{V \leq b\} \cap (\{U \leq a\} \cup \{U > a\})$ d'où $\{V \leq b\} = \{V \leq b, U \leq a\} \cup \{V \leq b, U > a\}$, comme $\{U > a\} = \{U \geq a\}$ \mathbb{P} -p.s. (car $\mathbb{P}(U = a) = 0$) d'où la réponse finale.

3. [1.5 point] En utilisant les questions 1. et 2. montrer que $F_{(U,V)}(a, b) = F_X(a)(2F_X(b) - F_X(a))\mathbf{1}_{a \leq b} + F_X(b)^2\mathbf{1}_{a > b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ et enfin montrer que $F_{(U,V)}(a, b) = \int_0^a \int_0^b 2f_X(u)f_X(v)\mathbf{1}_{u \leq v} dv du$.

Solution: Soient $a, b \in \mathbb{R}$, comme X et Y sont positives par conséquent $F_{(U,V)}(a, b) = 0$ si au moins l'un des deux négatif. Maintenant supposons que $a, b \geq 0$, alors on peut utiliser les questions précédentes et donc avec $F_{(U,V)}(a, b) = \mathbb{P}(U \leq a, V \leq b)$ on obtient deux cas :

si $b \leq a$ alors grâce à la question 1. on obtient $F_{(U,V)}(a, b) = \mathbb{P}(U \leq b, V \leq b) = (F_X(a) - F_X(b))^2$,

si $b > a$ alors grâce à la question 2. on obtient $F_{(U,V)}(a, b) = F_V(b) - (F_X(a) - F_X(b))^2$.

Et finalement après simplifications on obtient la réponse.

Pour ce qui est de la dernière égalité, il y a la méthode de la dérivée, et on peut aussi faire comme cela :

Supposons que $0 \leq a \leq b$, alors $\int_0^a \int_0^b 2f_X(u)f_X(v)\mathbf{1}_{u \leq v} dv du = \int_0^a \int_0^a \dots dv du + \int_0^a \int_a^b \dots dv du = \int_0^a \int_u^a 2f_X(u)f_X(v) dv du + \int_0^a \int_a^b 2f_X(u)f_X(v) dv du = 2 \int_0^a f_X(u)(F_X(a) - F_X(u)) du + 2(F_X(b) - F_X(a)) \int_0^a f_X(u) du$ d'où la réponse.

De même pour $0 \leq b \leq a$, dans ce cas on a $\int_0^a \int_0^b 2f_X(u)f_X(v)\mathbf{1}_{u \leq v} dv du = \int_0^b \int_0^b \dots dv du + \int_b^a \int_0^b \dots dv du$ et cette dernière intégrale en rouge étant nulle (en effet on n'a pas $u \leq v$ lorsque $b \leq u \leq a$ et $0 \leq v \leq b$) d'où la réponse comme tout à l'heure mais avec $a = b$ et on tombe bien sur $F_X(b)^2$, en effet $F_X(b)(2F_X(b) - F_X(b)) = F_X(b)^2$.

De plus avec cette expression et le fait que $X, Y \geq 0$ p.s. on obtient que $f_{(U,V)}(u, v) = 2f_X(u)f_X(v)\mathbf{1}_{0 \leq u \leq v}$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}$.

4. [2.5 points] Calculer $\mathbb{E}[UV^2 + 2U^2V + 3|V]$.

Solution: Tout d'abord remarquons que $\mathbb{E}[UV^2 + 2U^2V + 3|V]$ existe, en effet $UV^2 + 2U^2V + 3$ est positive et majorée par $3XY(X + Y)$ qui est intégrable via un calcul et le théorème de transfert et par indépendance de X et Y .

Pour ce qui est de calcul, utilisons les propriétés de l'espérance conditionnelle, elle est linéaire et comme le conditionnement se fait par rapport à $\sigma(V)$ et que V est $\sigma(V)$ -mesurable, d'où $\mathbb{E}[UV^2 + 2U^2V + 3|V] = V^2\mathbb{E}[U|V] + 2V\mathbb{E}[U^2|V] + 3$. Or d'après le cours pour tout $k \in \{1, 2\}$ on a $\mathbb{E}[U^k|V] = g_k(V)$ (en effet U^k est intégrable et (U, V) admet une densité), où $g_k(v) = \int_{\mathbb{R}} u^k f_{(U|V)}(u, v) du$, d'où $\mathbb{E}[UV^2 + 2U^2V + 3|V] = V^2g_1(V) + 2Vg_2(V) + 3$. Le calcul de $g_k(v)$ est facile, en effet $g_k(v) = \int_0^{+\infty} u^k \frac{f_{(U,V)}(u, v)}{f_V(v)} \mathbf{1}_{(f_V^{-1}(0))}(v) du$ avec $f_V(v) = \int_0^{+\infty} 2f_X(u)f_X(v)\mathbf{1}_{u \leq v} du = \dots$

Exercice 4 [5 points]

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires i.i.d. de fonction de densité f_X définie par $f_X(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On pose $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ et $Y_3 = \frac{X_1}{Y_1 Y_2}$.

1. [2 points] Trouver une fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui soit $C^1(D; \Delta)$ -difféomorphisme tel que $Y = \phi(X)$ où $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)'$ et $X = (X_1, X_2, X_3)'$, avec D et Δ deux ouverts de \mathbb{R}^3 à trouver.

Solution: D'après la densité commune de X_i on obtient que $X > 0$ p.s. en effet f_X étant p.p. continue sur \mathbb{R}_+ on obtient que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ et que $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, d'où $X = (X_1, X_2, X_3)' \in D$ p.s. avec $D = (\mathbb{R}_+^*)^3$.

La fonction ϕ est telle que par $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1/(x_1 + x_2), (x_1 + x_2)/(x_1 + x_2 + x_3))'$ on sait via les opérations faites sur X_i qui sont dans les définitions des Y_i que tous les Y_i sont strictement positives p.s. (en effet il est aisé de vérifier que $\mathbb{P}(Y_i = 0) = 0$ via $\mathbb{P}(X_i = 0) = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$).

La dernière étape étant de trouver ϕ^{-1} nous permettra de trouver $\Delta \subset (\mathbb{R}_+^*)^3$: Soient $y_1, y_2, y_3 > 0$, alors résolvons le système d'inconnus $x_1, x_2, x_3 > 0$ suivant $x_1 + x_2 + x_3 = y_1, x_1/(x_1 + x_2) = y_2$ et $(x_1 + x_2)/(x_1 + x_2 + x_3) = y_3$; on obtient que $x_3 = y_1 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2 = x_1/y_2$ et $x_1/y_2 = y_1 y_3$ et $x_1 = y_1 y_2 y_3$, d'où $x_3 = y_1 - y_1 y_3$ et $x_1 = y_1 y_2 y_3$ et donc $x_2 = y_1 - x_1 - x_3 = y_1 - y_1 y_2 y_3 - y_1 + y_1 y_3$ qui donne $x_2 = y_1 y_3 - y_1 y_2 y_3$; finalement $(x_1, x_2, x_3) = (y_1 y_2 y_3, y_1 y_3 - y_1 y_2 y_3, y_1 - y_1 y_3)$, or chaque $x_i > 0$ d'où $y_1 y_2 y_3 > 0, y_1 y_3 - y_1 y_2 y_3 > 0$ et $y_1 - y_1 y_3 > 0$, ce qui donne $y_1 > 0, 1 > y_2 > 0$ et $1 > y_3 > 0$, finalement $\Delta = \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[\times]0, 1[\subset (\mathbb{R}_+^*)^3$, et il est aisé de vérifier que $\phi \in C^1(D; \Delta)$ en effet par définition il suffit de vérifier que ϕ est une bijection de classe C^1 ainsi que ϕ^{-1} , c'est-à-dire que toutes les composantes $\phi^{(j)}$ et $(\phi^{-1})^{(j)}$ sont de classes C^1 , ce qui est aisé de vérifier, i.e. qu'il faut vérifier que $\frac{\partial^{i_1+i_2+i_3}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} f^j, 0 \leq i_1 + i_2 + i_3 \leq 1$

(donc $i_k \in \{0, 1\}$) existent et sont continues, avec f qui désigne n'importe quelle composante de ϕ et ϕ^{-1} : tout cela revient à démontrer chaque $\phi^{(j)}$ et $(\phi^{-1})^{(j)}$ admettent des dérivées partielles de premier ordre qui sont continues, i.e. $\frac{\partial}{\partial x_k} f$ existe et est continue, pour tout $f \in \{\phi^{(j)}, (\phi^{-1})^{(j)}\}$.

2. [2.5 points] En déduire une fonction de densité du vecteur aléatoire (Y_1, Y_2, Y_3) .

Solution: D'après une propriété du cours on a $X \in D$ p.s. et $Y = \phi(X)$ avec $\phi \in C^1(D; \Delta)$ -difféomorphisme, donc Y admet une densité f_Y donnée par : pour tout $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, f_Y(y) = f_X(\phi^{-1}(y)) |\det((\text{Jac}\phi^{-1})(y))| \mathbf{1}_\Delta(y)$ (une densité de X existe, en effet d'après le cours X_i indépendantes admettant des densités implique que X en admet une). Or on a

$$(\text{Jac}\phi^{-1})(y) = \begin{pmatrix} y_2 y_3 & y_1 y_3 & y_1 y_2 \\ y_3 - y_2 y_3 & -y_1 y_3 & y_1 - y_1 y_2 \\ 1 - y_3 & 0 & -y_1 \end{pmatrix}$$

qui donne un déterminant égale à $\det \left(\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} \right) = y_2 y_3 (y_1^2 y_3) + y_3 (1 - y_2) y_1^2 y_3 + (1 - y_3) ((1 - y_2) y_1^2 y_3 + y_2 y_1^2 y_3) = y_1^2 y_3$.

Remarque : pour calculer le déterminant d'une matrice 3×3 , souvenez-vous de la formule $\det(A) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ où le terme $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est appelé cofacteur du terme a_{ij} et le terme $\det(A_{ij})$ est appelé le mineur du terme a_{ij} .

Finalement on obtient

$$f_Y(y) = e^{-y_1} y_1^2 \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y_1) \mathbf{1}_{]0, 1[}(y_2) y_3 \mathbf{1}_{]0, 1[}(y_3).$$

On vérifie rapidement que $\int_0^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 f_X(y_1, y_2, y_3) dy_3 dy_2 dy_1 = 1$

3. [0.5 point] Y_1, Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

Solution: Comme c'est le produit de trois fonctions (et non de trois densités, enfin pour l'instant) dont chacune dépende d'une seule variable, d'où d'après le cours Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes, remarquons qu'on peut vérifier aisément

$$\int_{\mathbb{R}} f_{Y_1}(y_1) dy_1 = 1, \int_{\mathbb{R}} f_{Y_2}(y_2) dy_2 = 1, \int_{\mathbb{R}} f_{Y_3}(y_3) dy_3 = 1,$$

où $f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2} y_1^2 e^{-y_1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y_1), f_{Y_2}(y_2) = \mathbf{1}_{]0, 1[}(y_2)$ et enfin $f_{Y_3}(y_3) = 2 y_3 \mathbf{1}_{]0, 1[}(y_3)$ (voilà maintenant f_Y est bien le produit de trois densités $f_{Y_i}, i \in \{1, 2, 3\}$)