E.I.S.T.I - Département Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ année Ingénieurs - Génie mathématique

Examen de rattrapage : Probabilités Avancées

Donné le 04-07-2018 (Durée 2h00)

Les calculatrices, téléphones portables et tout appareil éléctronique sont interdits.
Les réponses doivent être motivées.
Seule une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée

Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, ${}^t x$ désigne la transposée de x.

Lorsqu'une variable aléatoire continue X, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Pour deux vecteurs aléatoires réelles X, de dimension n et Y de dimension m, tel que ${}^t(X, Y)$ admet une densité de probabilité $f_{(X,Y)}$ l'expression $\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$ nous permet de définir une fonction et donc pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$ on définit $f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \mathbf{1}_{B_{f_Y}}(y)$, où $B_{f_Y} := \{y \in \mathbb{R}^m,\ f_Y(y) > 0\}$.

Exercice 1.

On considère deux variables aléatoires X et Y définies dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X et Y sont intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. **À l'aide de la définition de l'espérance conditionnelle**, démontrer les propriétés suivantes :
   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[\mathrm{X} + \lambda \mathrm{Y} | \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}|\mathcal{G}\right] + \lambda \mathbb{E}\left[\mathrm{Y}|\mathcal{G}\right]$.
   (b) Si X est une variable aléatoire réelle $\mathcal{G}$-mesurable alors $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}|\mathcal{G}\right] = \mathrm{X}$, p.s.
   (c) Si X est une variable aléatoire réelle indépendante de $\mathcal{G}$ alors $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}|\mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathrm{X}\right]$.
2. On suppose que X et Y sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
   Calculer, en justifiant, $\mathbb{E}\left[\left.\frac{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}}{1 + \mathrm{Y}}\right| \mathrm{Y}\right]$.

Exercice 2.

Soit $\mathrm{X} = {}^t(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_1) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_2) = 0, \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{X}_1) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{X}_2) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = \rho.$$

1. Montrer que $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de covariances du vecteur gaussien ${}^t(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ si et seulement si $|\rho| \leq 1$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de ρ, la loi du vecteur gaussien ${}^t(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ admet-elle une densité ? Dans ce cas, exprimer une densité du couple ${}^t(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$.
3. En déduire la loi conditionnelle de X_2 sachant $\mathrm{X}_1 = x_1$, où $x_1 \in \mathbb{R}$, i.e. calculer l'expression de $f_{X_2|X_1}(x_2, x_1)$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

4. On pose $\mathrm{Y}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2)$ et $\mathrm{Y}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2\big)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Y} = {}^{t}(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2)$ est un vecteur gaussien et calculer la matrice de covariance du vecteur Y.
   (b) Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ? justifier votre réponse.
   (c) Montrer que la loi du vecteur Y admet une densité.
   (d) Donner l'expression de f_{Y} en fonction de ρ.

Exercice 3.

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de densité de probabilité :

$$f_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(x, y) = \frac{1}{6} x(y - x)e^{-y}\mathbb{1}_{0<x<y}(x, y).$$

1. Calculer la densité marginale f_{Y} de Y.
2. Montrer que, pour $y > 0$, la densité conditionnelle de X sachant $\mathrm{Y} = y$ est donnée par l'expression $f_{\mathrm{X}|\mathrm{Y}}(x, y) = \dfrac{6x(y - x)}{y^3}\mathbb{1}_{0<x<y}(x)$.
3. En déduire que $\mathbb{E}\left[\mathrm{X}|\mathrm{Y}\right] = \dfrac{1}{2}\mathrm{Y}$.

Exercice 4.

Soient ${}^{t}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}_2(0, \sigma^2)$ où $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On pose $\mathrm{Z} = 2\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ et $\mathrm{W} = 3\mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

1. Montrer que les variables aléatoires Z et W sont intégrables.
2. Montrer que ${}^{t}(\mathrm{Z}, \mathrm{W})$ est un vecteur aléatoire gaussien.
3. Calculer $\mathbb{E}[Z|W]$ et $\mathbb{E}[W|Z]$.

EISTI, GM ING1, Examen du Mercredi 6 Juin 2018
Probabilités Avancées

Règles : les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées. Seule une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Pour deux vecteurs aléatoires réelles X, de dimension n et Y de dimension m, tel que (X,Y) admet une densité de probabilité $f_{(X,Y)}$.

L'expression $\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$ nous permet de définir une fonction et donc pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$ on définit $f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \mathbf{1}_{B_{f_Y}}(y)$, où $B_{f_Y} := \{y \in \mathbb{R}^m, f_Y(y) > 0\}$.

Lorsqu'une variable aléatoire continue X, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X.

Soit $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \le a \le b\}$.

Exercice 1

On considère le vecteur aléatoire (X,Y) de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (y-x)e^{-y}\mathbf{1}_A(x,y), \text{ pour tous } x,y \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer les densités marginales f_X et f_Y de X et Y respectivement.

2. En déduire que pour tous réels x et y on a $f_{X|Y}(x,y) = 2(y-x)y^{-2}\mathbf{1}_A(x,y)$.

3. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.

4. Calculer $f_{Y|X}(y|x)$ et montrer que $\mathbb{E}[Y|X] = X+2$.

5. On considère le couple aléatoire $(U,V) = (X, Y-X)$.

  a. Déterminer la loi du couple (U,V).

  b. En déduire la loi de $Y-X$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. On considère

$$Y = \mathbf{1}_{X \le 1/2},\ Y_1 = X \ \text{ et } \ Y_2 = X(1/2 - X).$$

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire bornée dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors Z est $\mathbb{P}$-intégrable.

2. Rappeler la définition de $\mathbb{E}[Y_1|Y]$ et de $\mathbb{E}[Y_2|Y]$, puis montrer qu'elles existent.

3. Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

4. En utilisant le conditionnement sur une variable aléatoire discrète, montrer que

  a. $\mathbb{E}[Y_1|Y] = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$,

  b. $\mathbb{E}[Y_2|Y] = \frac{1}{24}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} - \frac{5}{24}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Soit $L^2_{\mathcal{G}} = L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, i.e. l'espace des v.a. de carrés intégrables et $\mathcal{G}$-mesurables. On définit $X \in L^2_{\mathcal{F}}$ et $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

1. Montrer que pour tout $Z \in L^2_{\mathcal{G}}$, on a $\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] + \mathbb{E}[(Y-Z)^2]$.

Astuce : Utiliser la propriété de la double espérance (la tour)[1].

2. En déduire que

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \inf_{W \in L^2_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[(X-W)^2].$$

Exercice 4

Soit $X = (X_1, X_2)'$ un vecteur gaussien de moyenne $(0,0)'$ et de matrice de covariances Γ où $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Justifier rigoureusement votre réponse.

2. Soit $U = \mathbb{E}[X_1|X_2]$. En montrant que U existe montrer qu'elle admet une fonction de densité f_U, à expliciter.

Astuce : Trouver une constante a telle que les variables aléatoires X_2 et Z soient indépendantes, où $Z = X_1 + aX_2$.

3. Calculer la fonction caractéristique de U.

[1] La propriété de la double espérance (la tour) :
Soit $E = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour toute variable aléatoire X définie sur E, on a $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$ où $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

EISTI, GM ING1, Examen du Mercredi 6 Juin 2018
Probabilités Avancées

Règles : les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées. Seule une feuille A4 recto-verso manuscrite est autorisée.

Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Pour deux vecteurs aléatoires réelles X, de dimension n et Y de dimension m, tel que (X,Y) admet une densité de probabilité $f_{(X,Y)}$.

L'expression $\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$ nous permet de définir une fonction et donc pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$ on définit $f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} \mathbf{1}_{B_{f_Y}}(y)$, où $B_{f_Y} := \{y \in \mathbb{R}^m, f_Y(y) > 0\}$.

Lorsqu'une variable aléatoire continue X, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X.

Soit $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq a \leq b\}$.

Exercice 1

On considère le vecteur aléatoire (X,Y) de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x,y) = (y-x)\,e^{-y}\mathbf{1}_A(x,y), \text{ pour tous } x,y \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer les densités marginales f_X et f_Y de X et Y respectivement.

(X,Y) admet une fonction de densité $f_{(X,Y)}$, donc f_X et f_Y existent et on a $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$ et $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}$.

Donc pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, $f_X(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\int_x^{+\infty}(y-x)e^{-y}\,dy = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)[y - e^{-y} - e^{-y} + xe^{-y}]_x^{+\infty}$ et $f_Y(y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\int_0^y (y-x)e^{-y}\,dx = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)e^{-y}[yx - \frac{x^2}{2}]_0^y$, i.e.

$$f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \text{ et } f_Y(y) = \tfrac{1}{2}y^2e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y),\ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Petite vérification :

$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^2e^{-y}\,dy = [(\frac{1}{2}y^2 + y + 1)e^{-y}]_{+\infty}^0 = 1.$

2. En déduire que pour tous réels x et y on a $f_{X|Y}(x,y) = 2(y-x)y^{-2}\mathbf{1}_A(x,y)$.

L'ensemble des points $y \in \mathbb{R}$ tels que $f_Y(y) = 0$ est $\{0\}$ d'où pour tous $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*$ on a $f_{X|Y}(x,y) = \frac{(y-x)e^{-y}\mathbf{1}_A(x,y)}{\frac{1}{2}y^2e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)}$, i.e.

$$f_{X|Y}(x,y) = 2(y-x)y^{-2}\mathbf{1}_A(x,y),\ \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$.

$X \in L^1(\Omega)$, en effet $\mathbb{E}[|X|] = \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx = 1 < +\infty$, donc $\mathbb{E}[X|Y]$ existe d'après le Théorème d'existence d'espérance conditionnelle.

Or une autre propriété du cours dit que lorsque (X,Y) admet une densité de probabilité $f_{(X,Y)}$ avec $h(X)$ intégrable, où h est borélienne on a $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[h(X)|Y] = \phi(y)$ où $\phi(y) =$

$\frac{\int_{\mathbb{R}} h(x) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx}{f_Y(y)}$. Comme $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x,y)\,dx = \int_0^y 2x(y-x)y^{-2}\,dx = [x^2y^{-1} - \frac{2}{3}x^3y^{-2}]_0^y = \frac{1}{3}y$, d'où

$$\mathbb{E}[X|Y] = \tfrac{1}{3}Y.$$

4. Calculer $f_{Y|X}(x,y)$ et montrer que $\mathbb{E}[Y|X] = X+2$.

Pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, $f_{Y|X}(x,y) = (y-x)e^{x-y}\mathbf{1}_A(x,y)$. D'après le cours $\mathbb{E}[Y|X]$ existe, en effet $Y \in L^1$ (car $\mathbb{E}[|Y|] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}y^3e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\times 3! < +\infty$.), donc $\mathbb{E}[Y|X] = \psi(X)$ où $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(x,y)\,dy = \int_x^{+\infty} y(y-x)e^{x-y}\,dy = [-y^2+xy+x-2y-2]_x^{+\infty} = x+2$. Finalement on a bien

$$\mathbb{E}[Y|X] = \psi(X) = X+2.$$

5. On considère le couple aléatoire $(U,V) = (X, Y-X)$.

a. Déterminer la loi du couple (U,V).

Soit $\psi : D \to \Delta$ telle que $\psi(x,y) = (x, y-x)$ pour tous $x,y \in D$, où $D := \mathbb{R}^2$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\Delta := \mathbb{R}^2$ alors on a ψ est un C^1-difféomorphisme et $\psi^{-1}(u,v) = (u, u+v)$. $(X,Y) \in D$ p.-s. et donc d'après le cours (U,V) admet une fonction de densité $f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\psi^{-1}(u,v))|\det(J(\psi^{-1})(u,v))|$ pour tous $u,v \in \mathbb{R}$.

Or $J(\psi^{-1})(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}u & \frac{\partial}{\partial v}u \\ \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, donc $f_{(U,V)}(u,v) = ((u+v)-u)e^{-(u+v)}\mathbf{1}_A(u,u+v)$ pour tous $u,v \in \mathbb{R}$.

Finalement

$$f_{(U,V)}(u,v) = ve^{-u-v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(u,v),\ \forall u,v \in \mathbb{R}.$$

Vérification rapide : $\int_{\mathbb{R}^2} f_{(U,V)}(u,v)\,du\,dv = 1$.

b. En déduire la loi de $Y-X$.

On a $V = Y-X$ et donc pour tout $v \in \mathbb{R}$, $f_{(Y-X)}(v) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)\int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,du$, i.e.

$$f_{(Y-X)}(v) = ve^{-v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v).$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. On considère

$$Y = \mathbf{1}_{X\le 1/2},\ Y_1 = X \ \text{ et } \ Y_2 = X(1/2-X).$$

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire bornée dans l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ alors Z est $\mathbb{P}$-intégrable.

Soit Z une v.a. bornée, alors il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $|Z| \le C$ presque-sûrement, donc $\mathbb{E}[|Z|] = \int_\Omega |Z(\omega)|\,d\mathbb{P}(\omega) \le \int_\Omega C\,d\mathbb{P}(\omega) = C\mathbb{P}(\Omega) = C < +\infty$, donc Z est $\mathbb{P}$-intégrable.

2. Rappeler la définition de $\mathbb{E}[Y_1|Y]$ et de $\mathbb{E}[Y_2|Y]$, puis montrer qu'elles existent.

En posant $U_1 = \mathbb{E}[Y_1|Y]$ et $U_2 = \mathbb{E}[Y_2|Y]$ et en utilisant les définitions vues en cours on a par définition :

Pour tout $i \in \{1,2\}$, U_i est une variable aléatoire telle que U_i est $\sigma(Y)$-mesurable et pour tout $A \in \sigma(Y)$, $\mathbb{E}[U_i \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_A]$.

D'après le Théorème d'existence d'espérance conditionnelle, il suffit que Y_1 et Y_2 soient intégrables. Mais d'après la précédent question, il suffit que Y_1 et Y_2 soient bornées, ce qui est le cas, en effet comme $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ on obtient que $|Y_1| = |X| \le 1$ p.s. et que $|Y_2| = |X(1/2 - X)| \le 1(1/2+1) = 3/2$.

3. Montrer que Y est une variable aléatoire discrète.

Pour tout $\omega \in \Omega$ t.q. $X(\omega) \le 1/2$ on a $Y(\omega) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega$ t.q. $X(\omega) > 1/2$ on a $Y(\omega) = 0$, donc avec $\{X \le 1/2\} \cup \{X > 1/2\} = \Omega$ on obtient que $Y(\omega) \in \{1?0\}$ pour tout $\omega \in \Omega$, finalement Y est une variables aléatoires à valeurs $\{0,1\}$, donc Y est une v.a. discrète.

4. En utilisant le conditionnement sur une variable aléatoire discrète, montrer que

a. $\mathbb{E}[Y_1|Y] = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$,

On doit trouver l'expression de $U_1 = \mathbb{E}[Y_1|Y]$, comme Y_1 est une v.a. discrète à valeurs dans $\{0,1\}$, on obtient donc $U_i = \mathbb{E}[Y_i|Y] = \mathbb{E}[Y_i|\{Y=0\}]\mathbf{1}_{\{Y=0\}} + \mathbb{E}[Y_1|\{Y=1\}]\mathbf{1}_{\{Y=1\}}$, i.e. $U_i = \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=0\}}]}{\mathbb{P}(Y=0)} + \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=1\}}]}{\mathbb{P}(Y=1)}$.

Or on a $\{Y=1\} = \{X \le 1/2\}$ et $\{Y=1\} = \{X > 1/2\}$ et donc on a les simplifications suivantes $k_i^1 := \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=1\}}]}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{X\le 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X\le 1/2)}$ et $k_i^0 := \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{Y=0\}}]}{\mathbb{P}(Y=0)} = \frac{\mathbb{E}[Y_i \mathbf{1}_{\{X>1/2\}}]}{\mathbb{P}(X>1/2)}$. D'où $U_i = k_i^1 \mathbf{1}_{\{Y=1\}} + k_i^0 \mathbf{1}_{\{Y=0\}}$.

Par conséquent $k_1^1 = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X\le 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X\le 1/2)} = \frac{\int_0^{1/2} x\,dx}{1/2} = \frac{1}{4}$ et $k_1^0 = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X>1/2\}}]}{\mathbb{P}(X>1/2)} = \frac{\int_{1/2}^{1} x\,dx}{1-1/2} = \frac{3}{4}$.

Donc on a bien $\mathbb{E}[Y_1|Y] = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$.

b. $\mathbb{E}[Y_2|Y] = \frac{1}{24}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} - \frac{5}{24}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$.

Et donc $k_2^1 = \frac{\mathbb{E}[X(1/2-X)\mathbf{1}_{\{X\le 1/2\}}]}{\mathbb{P}(X\le 1/2)} = \frac{\int_0^{1/2} x(1/2-x)\,dx}{1/2} = \frac{1}{24}$ et $k_2^0 = \frac{\mathbb{E}[X(1/2-X)\mathbf{1}_{\{X>1/2\}}]}{\mathbb{P}(X>1/2)} = \frac{\int_{1/2}^{1} x(1/2-x)\,dx}{1/2} = -\frac{5}{24}$.

Donc on a bien $\mathbb{E}[Y_2|Y] = \frac{1}{24}\mathbf{1}_{\{Y=1\}} - \frac{5}{24}\mathbf{1}_{\{Y=0\}}$.

Exercice 3

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Soit $L^2_{\mathcal{G}} = L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, i.e. l'espace des v.a. de carrés intégrables et $\mathcal{G}$-mesurables. On définit $X \in L^2_{\mathcal{F}}$ et $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

1. Montrer que pour tout $Z \in L^2_{\mathcal{G}}$, on a $\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] + \mathbb{E}[(Y-Z)^2]$.

Soit $Z \in L^2_{\mathcal{G}}$. On a $\mathbb{E}[(X-Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y+Y-Z)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2] + \mathbb{E}[(Y-Z)^2] + 2\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)]$.

Donc montrons que $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)] = 0$. Avec la propriété de la double espérance on a $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}]]$ où $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}]$ existe, en effet $\mathbb{E}[|(X-Y)(Y-Z)|] \le \frac{1}{2}\mathbb{E}[(X-Y)^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[(Y-Z)^2] \le \frac{1}{2}2\mathbb{E}[X^2+Y^2] + \frac{1}{2}2\mathbb{E}[Y^2+Z^2] < +\infty$.

On sait Y et Z sont $\mathcal{G}$-mesurables, donc $Y-Z$ est $\mathcal{G}$-mesurable, d'où $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}] = (Y-Z)\mathbb{E}[(X-Y)|\mathcal{G}]$. De plus $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ implique $\mathbb{E}[(X-Y)|\mathcal{G}] = 0$, finalement $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)|\mathcal{G}] = 0$, i.e. $\mathbb{E}[(X-Y)(Y-Z)] = 0$ et cqfd.

Astuce : Utiliser la propriété de la double espérance (la tour)[1].

2. En déduire que

$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = \inf_{W\in L^2_{\mathcal{G}}} \mathbb{E}[(X-W)^2].$$

Et donc $\inf_{W\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X-W)^2] = \inf_{W\in L^2(\mathcal{G})}(\mathbb{E}[(X-Y)^2]+\mathbb{E}[(Y-W)^2])$. Comme tout est positif avec $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$ qui ne contient pas de terme en W et que Y est $\mathcal{G}$-mesurable (par définition de Y) et que $Y\in L^2(\mathcal{G})$, d'où $\inf_{W\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X-W)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2]+\inf_{W\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(Y-W)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2]+\mathbb{E}[(Y-Y)^2]$, et donc on a bien

$$\inf_{W\in L^2(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X-W)^2] = \mathbb{E}[(X-Y)^2].$$

Exercice 4

Soit $X=(X_1,X_2)'$ un vecteur gaussien de moyenne $(0,0)'$ et de matrice de covariances Γ où $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ? Justifier rigoureusement votre réponse.

(X_1,X_2) est un vecteur gaussien donc d'après le cours X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariances du vecteur aléatoire (X_1,X_2) est diagonale, ce qui n'est pas le cas ici, donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

2. Soit $U=\mathbb{E}[X_1|X_2]$. En montrant que U existe montrer qu'elle admet une fonction de densité f_U, à expliciter.

Pour que U existe il suffit d'après le Théorème d'existence d'espérance conditionnelle que $X_1\in L^1$, ce qui est le cas, en effet d'après l'énoncé $X_1\sim\mathcal{N}(0,1)$ et donc $\mathbb{E}[|X_1|] = \int_{-\infty}^{+\infty}|x|(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}\,dx = 2[-(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}]_0^{+\infty} = 2<+\infty$.

Il est clair que (Z,X_2) est un vecteur gaussien, en effet $(X_2,Z)'=A(X_1,X_2)'$ avec $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc Z et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{Cov}(Z,X_2)=0$. Comme $Z=X_1+aX_2$ et que l'opérateur Cov est bilinéaire avec $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\sqrt{3}/2$, d'où X_2 et Z sont indépendantes si et seulement $a=-\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\mathrm{Cov}(X_2,X_2)}$, i.e. $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $U=\mathbb{E}[Z-aX_2|X_2]=\mathbb{E}[Z|X_2]-aX_2$ car X_2 est $\sigma(X_2)$-mesurable. Comme Z et X_2 sont indépendantes pour ce a trouvé, qui est unique, d'où $U=\mathbb{E}[Z]-aX_2=0-aX_2$, donc finalement $U=-aX_2$, U est donc une gaussienne avec $U\sim\mathcal{N}(0,(-a)^2)$, et donc admet une densité de probabilité f_U telle que $f_U(u)=\frac{e^{-u^2/(2a^2)}}{\sqrt{2\pi a^2}}$ pour tout $u\in\mathbb{R}$.

Astuce : Trouver une constante a telle que les variables aléatoires X_2 et Z soient indépendantes, où $Z=X_1+aX_2$.

3. Calculer la fonction caractéristique de U.

Comme $U=-aX_2$ et donc pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\phi_U(u)=\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}uU}]=\phi_{X_2}(-au)=e^{-\frac{1}{2}(-au)^2}$, i.e.

$$\phi_U(u)=e^{-\frac{a^2u^2}{2}},\ \forall u\in\mathbb{R}.$$

[1] La propriété de la double espérance (la tour) :
Soit $E=(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour toute variable aléatoire X définie sur E, on a $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$ où $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

EISTI, GM ING1, Sujet d'Examen du Rattrapage du Jeudi 6 juillet 2017
Probabilités Avancées

Règles : les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.

Notations : Lorsqu'une variable aléatoire continue X, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X.

Tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ est par défaut un vecteur colonne et x' désigne sa transposée.

Rappel : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. D'après le cours l'espérance conditionnelle de X sachant $\sigma(Y)$ existe et presque sûrement unique et elle est notée par $\mathbb{E}[X|Y]$ et/ou $\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$.

Exercice 1 [4 points]

Soient $E = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables identiquement distribuées définies sur E et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $A_n = \{T = n\}$.

On suppose que $S_T \in L^1(E)$.

En utilisant les ensembles A_n montrer que $\mathbb{E}[S_T|T] = T\mathbb{E}[X_1|T]$.

Exercice 2 [6 points]

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

On pose $A = 2X - Y - Z$ et $B = 3X + Y - 4Z$.

1. [2 points] Soit $(U,V)'$ un vecteur gaussien à valeurs $\mathbb{R}^2$ avec $\mathrm{cov}(U,V) \neq 0$.

Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $V - aU$ et U soient indépendants.

2. [1 point] Montrer que $(A,B)'$ est un vecteur gaussien.

3. [3 points] En vous aidant des questions précédentes montrer que $\mathbb{E}[B|A] = \frac{2}{3}A$.

Exercice 3 [10 points]

Soit Q_n un polynôme réel non nul à coefficients positifs.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_{(X,Y)}(x,y) = CQ_n(y-x)e^{-y}\mathbf{1}_{0<x<y},$$

où C est une constante.

1. [2 points] Déterminer la constante C de sorte que $f_{(X,Y)}$ soit la densité de loi du couple (X,Y) de variables aléatoires.

2. [0.5 point] X et Y sont-elles indépendantes ?

3. [2 points] Montrer que $\mathbb{E}[Y|X] = X + \Lambda$, où Λ est une constante qui dépend de Q_n que l'on déterminera. En déduire $\mathbb{E}[Y]$.

4. On pose $U = Y - X$ et $S = Y + X$.

4.1. [3 points] Déterminer la loi du couple (U,S).

4.2. [0.5 point] U et S sont-elles indépendantes ?

4.3. [2 points] Calculer $\mathbb{E}[U|S]$.

On rappelle que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt = (n-1)!$ et $Q_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{Q_n^{(k)}(0)}{k!}t^k$, où $Q_n^{(k)}(0)$ désigne la dérivée d'ordre k de Q_n au point 0.

EISTI, GM ING1, Examen du Mercredi 10 Mai 2017
Probabilités Avancées

Règles : les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.

Lorsqu'une variable aléatoire continue X, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X.

Exercice 1 [6 points]

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel on définit les variables aléatoires X et Y. On suppose que X et Y sont indépendantes et de même loi avec X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On introduit les variables aléatoires T et U qui sont définies par $T = X + Y$ et $U = \max(X, Y)$.

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}[h(X)] < +\infty$.

1. $i)$ Rappeler les définitions de $\mathbb{E}[h(X)|T]$ et $\mathbb{E}[h(X)|U]$.

$ii)$ Montrer qu'elles existent.

2. Montrer que le vecteur (T, X) admet une fonction de densité et trouver l'expression de $f_{(T,X)}(t, x)$ pour tous $x, t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|T]$.

4. Calculer $\mathbb{P}(X = U)$ et en déduire que le vecteur (X, U) n'admet pas une fonction de densité.

5. Montrer que U admet une fonction de densité telle que $f_U = 2f_X(1 - \frac{1}{\lambda} f_X)$.

6. En introduisant la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{X \le Y\}}$, calculer $\mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_A]$ pour tout $A \in \sigma(U)$, et en déduire $\mathbb{E}[h(X)|U]$.

7. Trouver les expressions de $\mathbb{E}[X|T]$ et $\mathbb{E}[X|U]$?

Exercice 2 [4 points]

Soit $U = (X, Y)'$ un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}_2(m, K)$ où $m = (0, 0)'$ et $K = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

On pose $W = X$ et $Z = 2X - Y$.

1. Trouver la loi de $(W, Z)'$.

2. Exprimer Y en fonction de W et Z.

3. Montrer que $\mathbb{E}[X^2 Y|(2X - Y)]$ existe et calculer la.

Exercice 3 [4 points]

Posons $\Gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{smallmatrix}\right)$, où $|k| < 1$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2)'$ de moyenne nulle et de matrice de covariances Γ.

2. Pour tout $i \in \{1, 2\}$ on pose $Y_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - (-1)^i X_2)$.

a. Montrer que $Y = (Y_1, Y_2)'$ est un vecteur aléatoire gaussien et calculer la matrice de covariance du vecteur Y, que l'on note par $\overline{\Gamma}$.

b. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

c. Montrer que la loi de Y admet une fonction de densité f_Y.

d. Donner l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de k et $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 [6 points]

Soit $H = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel on définit une variable aléatoire Z presque sûrement positive telle que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1$.

Soient $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$ et $\mathbb{Q} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable définie par $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A Z]$. On sait d'après le cours que $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire étagée W définie sur H, on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[W] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[WZ]$.

2. En utilisant un théorème de convergence (à préciser), montrer que pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ (intégrable sous $\mathbb{Q}$), on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ]$.

3. Montrer que pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathscr{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathscr{G}].$$

EISTI, GM ING1, Examen du Mercredi 10 Mai 2017
Probabilités Avancées

Règles : les documents, les calculatrices et les téléphones ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être motivées.

Lorsqu'une variable aléatoire continue X, définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ admet une fonction de densité, elle sera notée par f_X.

Exercice 1 [6 points]

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel on définit les variables aléatoires X et Y. On suppose que X et Y sont indépendantes et de même loi avec X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On introduit les variables aléatoires T et U qui sont définies par $T = X + Y$ et $U = \max(X, Y)$.

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\mathbb{E}[h(X)] < +\infty$.

1. $i)$ Rappeler les définitions de $\mathbb{E}[h(X)|T]$ et $\mathbb{E}[h(X)|U]$.

Solution: $\mathbb{E}[h(X)|T] := Y$ est une variable aléatoire $\sigma(T)$-mesurable telle que pour tout $A \in \sigma(T)$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(X)\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y\mathbf{1}_A]$; $\mathbb{E}[h(X)|U] := Z$ est une variable aléatoire $\sigma(U)$-mesurable telle que pour tout $A \in \sigma(U)$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h(X)\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z\mathbf{1}_A]$.

$ii)$ Montrer qu'elles existent.

Solution: Comme $h(X) \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et que $\sigma(T)$ et $\sigma(U)$ sont des tribus, d'où d'après un théorème du cours $\mathbb{E}[h(X)|T]$ et $\mathbb{E}[h(X)|U]$ existent et sont presque sûrement uniques.

2. Montrer que le vecteur (T, X) admet une fonction de densité et trouver l'expression de $f_{(T,X)}(t, x)$ pour tous $x, t \in \mathbb{R}$.

Solution: Soit ϕ définie de A dans B telle que $\phi(x, y) := (x + y, x)$, où $A = \mathbb{R}^2$ et $B = \mathbb{R}^2$. ϕ est clairement bijective avec $\phi^{-1}(t, a) = (a, t - a)$ pour tout $(t, a) \in \mathbb{R}^2$. ϕ et ϕ^{-1} sont C^1 car elles ont des composantes C^1, donc ϕ est un C^1-difféomorphisme de A dans B et par un théorème vu en cours (via la transformation jacobienne) on obtient que (T, X) admet une densité et que pour tous $t, x \in \mathbb{R}$:

$$f_{(T,X)}(t, x) = f_{(X,Y)}(\phi^{-1}(t, x))|J|\mathbf{1}_A(t, x)$$

où

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(\phi^{-1})^{(1)}}{\partial t}(t,a) & \frac{\partial(\phi^{-1})^{(1)}}{\partial a}(t,a) \\ \frac{\partial(\phi^{-1})^{(2)}}{\partial t}(t,a) & \frac{\partial(\phi^{-1})^{(2)}}{\partial a}(t,a) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1.$$

Or pour tous $t, x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(\phi^{-1}(t, x)) &= f_{(X,Y)}(x, t - x) \\ &= f_X(x) f_Y(t - x) = \lambda e^{-x}\mathbf{1}_{x \geq 0}\lambda e^{-\lambda(t-x)}\mathbf{1}_{t-x \geq 0} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{0 \leq x \leq t} \end{aligned}$$

D'où

$$f_{(T,X)}(t, x) = \lambda^2 e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{0 \leq x \leq t}, \forall t, x \in \mathbb{R}.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|T]$.

Solution: D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{(T,X)}(t,x)\,dx = \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{t \geq 0}\,dx$, i.e.

$$f_T(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \mathbf{1}_{t \geq 0}.$$

Donc en appliquant la propriété vue en cours on obtient $\mathbb{E}[h(X)|T] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X|T}(T,x)\,dx$ où $f_{X|T}(t,x) = \frac{f_{(X|T)}(t,x)}{f_T(t)} \mathbf{1}_{f_T(t) \neq 0} = \frac{1}{t} \mathbf{1}_{t \geq x > 0}$ pour tous $t, x \in \mathbb{R}$. Finalement

$$\mathbb{E}[h(X)|T] = \frac{1}{T} \int_0^T h(x)\,dx.$$

4. Calculer $\mathbb{P}(X = U)$ et en déduire que le vecteur (X,U) n'admet pas une fonction de densité.

Solution: $\mathbb{P}(X = U) = \mathbb{P}(X = \max(X,Y)) = \mathbb{P}(Y < X)$ d'où $\mathbb{P}(X = U) = \int_0^{+\infty} \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\,dy\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} [e^{-\lambda y}]_x^0\,dx = [e^{-\lambda x}]_{+\infty}^0 - \frac{1}{2}[e^{-2\lambda x}]_{+\infty}^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Si (X,U) admettait une fonction de densité on aurait

$$\mathbb{P}(X = U) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{X=U}] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{x=u} f_{(X,U)}(x,u)\,dm_2(x,u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{u\}} f_{(X,U)}(x,u)\,dm_1(x) \right) dm_1(y) = 0$$

en effet $m_1(\{u\}) = 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donc par contradiction (X,U) n'admet pas de fonction de densité.

5. Montrer que U admet une fonction de densité telle que $f_U = 2 f_X (1 - \frac{1}{\lambda} f_X)$.

Solution: Pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u, Y \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u)\mathbb{P}(Y \leq u) = \mathbb{P}(X \leq u)^2 = (F_X(u))^2$ et donc F_U est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_U(u) = F_U'(u) = 2F_X'(u) F_X(u) = 2 f_X(u)(1 - \frac{1}{\lambda} f_X(u))$ i.e.

$$f_U = 2 f_X (1 - \frac{1}{\lambda} f_X).$$

6. En introduisant la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\{X\le Y\}}$, calculer $\mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_A]$ pour tout $A\in\sigma(U)$, et en déduire $\mathbb{E}[h(X)|U]$.

Solution: Soit $A\in\sigma(U)$. Donc il existe $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $A=\{U\in B\}$ et on obtient les calculs suivants :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_A] &= \mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(U)]\\
&= \mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(U)\mathbf{1}_{\{X\le Y\}}]+\mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(U)\mathbf{1}_{\{X>Y\}}] (\text{car chacune des 2 espérances sont finies})\\
&= \mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(Y)\mathbf{1}_{\{X\le Y\}}]+\mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(X)\mathbf{1}_{\{X>Y\}}]\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} h(x)\mathbf{1}_B(y)\mathbf{1}_{x\le y}f_X(x)f_Y(y)\,dx\right)dy+\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} h(x)\mathbf{1}_B(x)\mathbf{1}_{x>y}f_X(x)f_Y(y)\,dy\right)dx,
\end{aligned}
$$

(par Fubini-Tonelli et le fait que X et Y sont indépendantes). Ici le but est clairement de faire sortir $\mathbf{1}_B$, afin d'avoir une espérance à la fin, dans laquelle $\mathbf{1}_B(U)$ multiplié par une expression en U, c'est pour cela que nous avons $dx\,dy$ dans la première intégrale double et $dy\,dx$ dans la seconde.

Donc en remplaçant y par u dans la première et x par u dans la seconde et en utilisant la question **5**. on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(U)] &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} h(x)f_X(x)\,dx\right)f_Y(u)\mathbf{1}_B(u)\,du+\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} f_Y(y)\,dy\right)h(u)\mathbf{1}_B(u)f_X(u)\,du\\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{u} h(x)f_X(x)\,dx\right)\frac{1}{2(1-e^{-\lambda u})}f_U(u)\mathbf{1}_B(u)\,du+\int_0^{+\infty} h(u)\mathbf{1}_B(u)\frac{1}{2}f_U(u)\,du\\
&= \int_0^{+\infty} K(u)\mathbf{1}_B(u)f_U(u)\,du
\end{aligned}
$$

où $K(u)=\frac{1}{2}\big(h(u)+(1-e^{-\lambda u})^{-1}\int_0^u h(x)f_X(x)\,dx\big)$ qui est bien une fonction mesurable.

Donc $\mathbb{E}[h(X)\mathbf{1}_B(U)]=\mathbb{E}[K(U)\mathbf{1}_B(U)]$ et

$$\mathbb{E}[h(X)|U]=K(U).$$

7. Trouver les expressions de $\mathbb{E}[X|T]$ et $\mathbb{E}[X|U]$?

Solution: En prenant $h(x)=x$ on obtient

$$\mathbb{E}[X|U]=\frac{1}{2}\big(U+(1-e^{-\lambda U})^{-1}\int_0^U \lambda x e^{-\lambda x}\,dx\big)=\frac{(1+\lambda U)-(1+2\lambda U)e^{-\lambda U}}{2\lambda(1-e^{-\lambda U})}$$

et

$$\mathbb{E}[X|T]=\frac{1}{T}\int_0^T x\,dx=\frac{T}{2}.$$

Exercice 2 [4 points]

Soit $U = (X,Y)'$ un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}_2(m,K)$ où $m = (0,0)'$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $W = X$ et $Z = 2X - Y$.

1. Trouver la loi de $(W,Z)'$.

Solution: $(W,Z)' = A(X,Y)'$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ donc $(W,Z)'$ est un vecteur aléatoire gaussien de loi $\mathcal{N}_2(0,AKA')$ avec $AKA' = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Exprimer Y en fonction de W et Z.

Solution: On a $Y = 2X - Z = 2W - Z$.

3. Montrer que $\mathbb{E}[X^2Y|(2X-Y)]$ existe et calculer la.

Solution: On sait d'après l'énoncé que $\mathbb{E}[X^4], \mathbb{E}[Y^2]$ sont finies (en effet loi gaussienne implique facilement que $\mathbb{E}[X^k] < +\infty$), d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\mathbb{E}[X^2Y] < \sqrt{\mathbb{E}[X^4]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]} < +\infty$.

Donc $\mathbb{E}[X^2Y|(2X-Y)]$ existe et on a $\mathbb{E}[X^2Y|(2X-Y)] = \mathbb{E}[W^2(2W-Z)|Z] = 2\mathbb{E}[W^3|Z] - \mathbb{E}[W^2Z|Z] = 2\mathbb{E}[W^3|Z] - Z\mathbb{E}[W^2|Z]$ car Z est $\sigma(Z)$-mesurable.

On a $\bar{K} := AKA'$ inversible avec $\det(\bar{K}) = \frac{3}{4} \neq 0$ et $\bar{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4/3 \end{pmatrix}$, donc d'après le cours $f_{(W,Z)}$ existe et on a $f_{(W,Z)}(w,z) = (2\pi)^{2/2}\det(\bar{K})^{1/2}e^{-\frac{1}{2}(w,z)\bar{K}^{-1}(w,z)'} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(4x^2-4xy+\frac{4}{3}y^2)}}{\sqrt{3}\pi}$ pour tous $w,z \in \mathbb{R}$.

D'où $f_Z(z) = e^{-\frac{1}{6}z^2}\sqrt{6\pi} > 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $f_{W|Z}(w,z) = 2\frac{e^{-\frac{1}{2}(2w-z)^2}}{\sqrt{2\pi}}$ pour tous $w,z \in \mathbb{R}$.

On en déduit que $\mathbb{E}[W^2|Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 f_{W|Z}(w,z)\,dw\Big|_{z=Z} = \frac{1}{4}(1+Z^2)$ et $\mathbb{E}[W^3|Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} w^3 f_{W|Z}(w,z)\,dw\Big|_{z=Z} = \frac{1}{8}Z(3+Z^2)$, finalement

$$\mathbb{E}[X^2Y|(2X-Y)] = 2\tfrac{1}{8}z(3+z^2) - z\tfrac{1}{4}(1+z^2)\Big|_{z=2X-Y} = X - \frac{Y}{2}.$$

Exercice 3 [4 points]

Posons $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$, où $|k| < 1$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2)'$ de moyenne nulle et de matrice de covariances Γ.

Solution: La matrice Γ est symétrique. De plus, pour tout $x = (x_1, x_2)' \in \mathbb{R}^2$, en utilisant $|k| < 1$, $x'\Gamma x = x_1^2 + 2kx_1x_2 + x_2^2 \geq x_1^2 - 2|x_1||x_2| + x_2^2 = (|x_1| - |x_2|)^2 \geq 0$. Par conséquent, Γ est symétrique positive, donc d'après une proposition du cours, il existe un vecteur gaussien $X = (X_1, X_2)'$ de moyenne nulle et de matrice de covariances Γ.

Si on ne connaît pas cette propriété, on peut aussi dire qu'il existe une matrice A telle que $AI_2A' = \Gamma$, i.e. $AA' = \Gamma$. En diagonalisant on obtient $PD^{1/2}D^{1/2}P^{-1} = \Gamma$ d'où $A = (\det(P))^{-1/2}PD^{1/2}$, en effet $\det(P)P^{-1} = P'$ avec vecteurs propres de P (qui sont les colonnes de P) $(1,1)'$ et $(-1,1)'$, correspondant aux valeurs propres respectives $1+k$ et $1-k$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+k} & -\sqrt{1-k} \\ \sqrt{1+k} & \sqrt{1-k} \end{pmatrix}$.

2. Pour tout $i \in \{1,2\}$ on pose $Y_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - (-1)^i X_2)$.

a. Montrer que $Y = (Y_1, Y_2)'$ est un vecteur aléatoire gaussien et calculer la matrice de covariance du vecteur Y, que l'on note par $\overline{\Gamma}$.

Solution: On a, presque sûrement, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}CX$ où $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, or X est un vecteur gaussien de moyenne nulle, donc, d'après une propriété du cours, Y est un vecteur gaussien de moyenne nulle et sa matrice de covariances $\bar{\Gamma}$ est égale à $CKC' = \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix}$.

b. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Solution: Y est un vecteur gaussien tel que $\bar{\Gamma}$ est diagonale, donc, d'après une propriété du cours, Y_1 et Y_2 sont indépendants.

c. Montrer que la loi de Y admet une fonction de densité f_Y.

Solution: $\bar{\Gamma}$ est de déterminant égal à $1-k^2$, qui est non nul car $|k| < 1$ par hypothèse. Par conséquent la matrice $\bar{\Gamma}$ est inversible et on en déduit (d'après une propriété du cours) que la loi de Y admet une densité.

d. Donner l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de k et $y \in \mathbb{R}$.

Solution: Il y a une faute de frappe car $y \in \mathbb{R}^2$!

On a $\bar{\Gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} (1+k)^{-1} & 0 \\ 0 & (1-k)^{-1} \end{pmatrix}$ et donc pour tout $y = (y_1, y_2)' \in \mathbb{R}^2$ on obtient

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-k^2}} e^{-\frac{y_1^2}{2(1+k)} - \frac{y_2^2}{2(1-k)}}.$$

Exercice 4 [6 points]

Soit $H = (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel on définit une variable aléatoire Z presque sûrement positive telle que $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = 1$.

Soient $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$ et $\mathbb{Q} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable définie par $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A Z]$. On sait d'après le cours que $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité.

1. Montrer que pour toute variable aléatoire étagée W définie sur H, on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[W] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[WZ]$.

Solution: Soit W une v.a. étagée définie sur H, alors d'après la définition de W il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une suite d'événements de $\mathscr{F}$, $(A_k)_{1\le k\le n}$ et une suite de réels $(a_k)_{1\le k\le n}$ strictement croissante tels que $W = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$. Donc par la linéarité de l'espérance on obtient $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[W] = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{Q}(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_{A_k} Z] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[WZ]$.

2. En utilisant un théorème de convergence (à préciser), montrer que pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ (intégrable sous $\mathbb{Q}$), on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ]$.

Solution: Soit $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$. On sait d'après le cours de Mesure et Intégration qu'il existe une suite de v.a. étagées croissante $(W_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de H telles que $\lim_{k\to+\infty} W_k = X$. Donc d'après le résultat démontré de la question précédente et le théorème de convergence monotone on obtient $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\lim_{k\to+\infty} W_k] = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[W_k] = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[W_k Z] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\lim_{k\to+\infty} W_k Z] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ]$, en effet $Z \ge 0, (W_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ strictement croissante impliquent $(W_k Z)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

3. Montrer que pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathscr{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathscr{G}].$$

Solution: Soit $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ p.s. positive. Comme $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ]$ d'où $XZ \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathscr{G}]$ existe, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]$ également.

Soit $A \in \mathscr{G}$ et $V = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathscr{G}]$.

On a $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X\mathbf{1}_A]$, où on a utilisé la question 2 avec $X\mathbf{1}_A \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ car $X^1(\Omega, Fc, \mathbb{Q})$. Donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbf{1}_A]$, où on a utilisé la définition de $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]$. Or $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$ implique avec une inégalité de cours $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbf{1}_A \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{Q})$. Donc en réutilisant la question 2 on obtient $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbf{1}_A]$ et la double espérance donne $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbf{1}_A|\mathscr{G}]]$. Comme $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbf{1}_A$ est $\mathscr{G}$-mesurable d'où $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[V\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathscr{G}]\mathbf{1}_A]$, on a donc bien

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathscr{G}]\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathscr{G}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathscr{G}].$$