

# INTRODUCTION AUX PROBABILITES

## I

Support du cours donné en 1<sup>re</sup> année  
par Marietta Manolessou  
EISTI - Département Mathématiques

Année 2013-2014



# Table des matières

	<b>Probabilités</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Probabilités</b>	<b>1</b>
1	Bibliographie . . . . .	1
2	Aperçu historique . . . . .	1
3	Introduction . . . . .	3
1	Algèbres - Tribus - Mesures . . . . .	3
2	Tribus . . . . .	3
3	Ensembles et applications mesurables . . . . .	3
4	Intégrale de Lebesgue . . . . .	7
1	Intégration d'après Lebesgue . . . . .	7
5	Probabilités . . . . .	10
1	Phénomènes-expériences aléatoires . . . . .	10
2	Evénements - Espace échantillon . . . . .	10
3	Mesures de probabilité . . . . .	10
4	Propriétés de la mesure de probabilité . . . . .	11
6	Construction d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . . . . .	12
1	Cas discret ou dénombrable . . . . .	12
2	Modèle uniforme . . . . .	12
3	Analyse combinatoire . . . . .	13
7	Construction d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - Cas Continu . . . . .	16



# Table des figures

1.1	Pour $k = 3$ en hachuré : $\sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} V_n \left( \left\{ x \mid \frac{j}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j+1}{2^k} \right\} \right)$ . . . . .	8
1.2	Même si $f(x)$ est continue <b>par morceaux</b> , l'intégrale de Lebesgue peut être définie (définition pas réalisable pour l'intégrale de Riemann). . . . .	9
1.3	$n = 3, p = 6$ . . . . .	15



# Chapitre 1

## Probabilités

### 1 Bibliographie

- \* “Initialisation aux probabilités” par Sheldon M. Ross  
édition : Press Univers. et Polytechniques Romandes Diffusion
- \* “Probabilités Modernes et Pratiques” par J.-C. Radix  
Edition : Tec et doc
- \* “Introduction aux probabilités” par P. Bremaud  
Edition : Springer et Verlog
- \* “Probabilités : Théorie et Application” par Y. Caumel  
Edition : Eyrolles
- \* “An introduction to probability theory and its applications” - volume 1 - par W. Feller  
Edition : Wiley International Edition
- \* “Schaum Series - Lipschutz”  
Edition : Murray Spiegel
- \* “Exercices in probability” par I. Cacoullos  
Edition : Springer -Verlag
- \* “Probabilités : Exercices corrigés et rappels de cours” par J.-P. Lecoutre  
Edition : Masson
- \* “Exercices ordinaires de probabilités” par G. Frugier  
Edition : Ellipses
- \* “Lebesgues-Integration and Measure” A.J.Weir  
, (Cambridge Univ.Press)

### 2 Aperçu historique

- \* FERMAT 1601-1665
- \* PASCAL 1623-1662
- \* LAPLACE 1749-1827
- \* GAUSS 1777-1855
- \* Aux XVII<sup>ème</sup>, XVIII<sup>ème</sup> et XIX<sup>ème</sup> siècles, les phénomènes aléatoires dans le cadre des jeux étaient étudiés.

\*  $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(N)}{N}$   $n$  : fréquence de réalisations d'un événement  $A$   
 $N$  : nombre d'expériences

- \* KOLMOGOROV 1933 Pour la première fois, il donne une définition rigoureuse des probabilités en partant des théorèmes d'intégration et de la mesure de LEBESGUE et BOREL.

## 3 Introduction

### 1 Algèbres - Tribus - Mesures

#### Algèbre

##### Définition 3.1

Soit  $\Omega$  un ensemble. Une famille  $\mathcal{A}$  de sous ensembles de  $\Omega$  est une **algèbre sur  $\Omega$**  si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- a.i)  $\Omega$  et l'ensemble  $\emptyset$  appartiennent à  $\mathcal{A}$
- a.ii) Si  $A \in \mathcal{A}$  alors  $A^c \in \mathcal{A}$  (stabilité par le passage au complémentaire)
- a.iii) Si  $A$  et  $B \in \mathcal{A}$  alors  $(A \cap B) \in \mathcal{A}$

##### Exemple d'une algèbre sur $\mathbb{R}$

Sur  $\Omega = \mathbb{R}$  on définit l'algèbre  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$  qui est la famille des unions finies d'intervalles de  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{A}(\mathbb{R})$  contient en plus de l'ensemble vide toutes les unions finies d'intervalles de tous types :

$$[a, b], ]a, b[, [a, b[, ]a, b], ]-\infty, a[, [b, +\infty[, ]b, +\infty[.$$

### 2 Tribus

**Définition 3.2** Une tribu (ou  $\sigma$ -algèbre) sur  $\Omega$  est une famille  $\mathcal{T}$  de sous-ensembles de  $\Omega$  telle que :

- t.1  $\Omega$  et l'ensemble  $\emptyset$  sont dans  $\mathcal{T}$ .
- t.2 Si  $A \in \mathcal{T}$  alors  $A^c \in \mathcal{T}$
- t.3 Si  $A_n (n \geq 1) \in \mathcal{T}$  alors  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$  (stabilité par union dénombrable)

##### Remarque 3.1

On déduit facilement que  $\mathcal{T}$  est stable par intersection dénombrable.

##### Exemple 3.1

L'ensemble  $\mathcal{P}$  de toutes les parties de  $\Omega$  est une tribu.

##### Exemple 3.2 La tribu de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

En théorie de Probabilités, la façon la plus courante pour définir une tribu est la suivante : on sélectionne une famille  $\mathcal{C}$  de sous-ensembles de  $\Omega$  que l'on juge intéressante (pour une raison ou une autre), et on définit la tribu  $\mathcal{T}$  sur  $\Omega$  comme étant la plus petite tribu contenant tous les ensembles dans  $\mathcal{C}$ .

Ainsi sur  $\mathbb{R}$ , on définit la tribu de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , comme étant la plus petite tribu qui contient les intervalles fermés  $[a, b]$  o  $-\infty < a < b < +\infty$ . Avec la topologie habituelle,  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est la tribu engendrée par l'ensemble  $\mathcal{D}$  des demi-

**droites** ( $] - \infty, \alpha[$  ou  $] - \infty, \alpha]$ ) ou par l'ensemble des intervalles.

### 3 Ensembles et applications mesurables

- a) Si, sur un ensemble  $\Omega$ , on définit une tribu  $\mathcal{T}$  alors on dit que  $(\Omega, \mathcal{T})$  est un espace mesurable et les parties de  $\Omega$  sont des ensembles mesurables de  $\Omega$  si elles appartiennent à  $\mathcal{T}$ .
- b) Soit  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $Y$  un espace topologique. On dit qu'une application  $f : \Omega \rightarrow Y$  est mesurable si l'image réciproque par  $f$  de tout ouvert  $A \in \mathcal{O}_Y$  de  $Y$  (o  $\mathcal{O}_Y \equiv$  la famille des ouverts de  $Y$ ) est un ensemble mesurable :

$$\text{i.e : si } A \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$$

##### Exemple 3.3 : Soit un ensemble $\Omega$

1.3.1 Reprenons l'exemple de la tribu  $\mathcal{T} = \mathcal{P}$  l'ensemble des parties de  $\Omega$  (ex. 1.2.a.). Etant donné un espace topologique  $Y$ , toute fonction  $f : \Omega \rightarrow Y$  est une fonction mesurable.

1.3.2 On considère la fonction numérique,  $\forall P \in \mathcal{P}(\Omega), x_p : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$x_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in P \\ 0 & \text{si } x \notin P \end{cases}$$

appelée **fonction caractéristique** (ou indicatrice) de la partie  $P \subset \Omega$ . C'est une fonction mesurable ssi  $P$  est une **partie mesurable** de  $\Omega$ .

### 1.3.3 Généralisation de la tribu de Borel - Application Borélienne

L'ensemble  $\mathcal{O}$  des ouverts d'un espace topologique  $\Omega$  quelconque n'est pas toujours une tribu. C'est ainsi qu'on considère souvent la tribu  $\mathcal{B} = \mathcal{O}$  (engendrée par  $\mathcal{O}$ ) qu'on appelle **tribu de Borel**. Les éléments de  $\mathcal{B}$  sont appelés **ensembles de Borel** ou **Boréliens** de  $\Omega$ . Toute fonction (ou application) mesurable pour la tribu  $\mathcal{B}$  est appelée fonction (ou application) **borélienne**. En particulier une **fonction continue est borélienne**.

#### Remarque 3.2

On vérifie (comme pour  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ) que les **tribus de Borel de  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  etc...** peuvent tre engendrées par l'ensemble des **rectangles, parallélépipèdes** etc ... à ctés parallèles aux axes.

#### Propriétés des fonctions mesurables

On donne l'énoncé (sans démonstration) des théorèmes suivants :

#### Théorème 3.1 (opérations)

i) Soient  $X, Y, Z$  trois espaces mesurables et soient  $f$  et  $g$  deux applications mesurables de  $X$  dans  $Y$  et de  $Y$  dans  $Z$  :

$$\Rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

L'application **composée**  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est **mesurable**.

ii) Soient  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace mesurable,  $u$  et  $v$  deux fonctions numériques mesurables.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ x \rightarrow (u(x), v(x)) \end{array} \right\} \text{est mesurable}$$

(o  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  est muni de la topologie habituelle)

#### Théorème 3.2 (Passage à la limite)

Soit  $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$  une suite de fonctions numériques mesurables définies sur l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{T})$ , et convergente ponctuellement vers la fonction  $f$  ;  
 $\Rightarrow$  la fonction  $f$  est aussi mesurable sur  $(\Omega, \mathcal{T})$ .

Ce dernier résultat est très utile à la **théorie de l'intégration**.

#### Mesures

On utilise la notation  $\bar{\mathbb{R}}$  pour la droite "achevée"  $[-\infty, +\infty]$  et  $\bar{\mathbb{R}}^+$  pour la demi-droite "achevée"  $[0, +\infty]$ .

#### Définition 3.3

Soit  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace mesurable. On dit que la fonction :

$$\mu : \mathcal{T} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$$

est une **mesure positive** (ou simplement **mesure**) si :

- a) (non trivialité)  $\forall A \in \mathcal{T} \mu(A)$  **n'est pas toujours égale à**  $+\infty$   
 b) Soit  $I \subset \mathbb{N}$ . Pour toute famille dénombrable  $\{A_i\}_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathcal{T}$  deux à deux disjoints,  $(A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j)$  on a :

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\text{fonction dénombrablement additive})$$

**Remarque 3.3**

- a) Si  $\Omega$  est un espace topologique et si  $\mathcal{T}$  est la tribu de Borel  $\mathcal{B}$ , alors une mesure sur  $\mathcal{B}$  est appelée **mesure borélienne**.  
 b) Si  $\mu(\Omega)$  est fini on dit que la mesure positive  $\mu$  est **bornée**.  
 c) Le triplet  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  est un **espace mesuré**.  
 d) Les séries intervenant dans l'additivité dénombrable doivent être **absolument convergentes**.  
 e) On démontre facilement que les mesures satisfont les propriétés :

**Proposition 3.1 Propriétés d'une mesure**

Soit  $(X, \mathcal{F})$  un espace mesurable ; on définit sur  $\mathcal{F}$  une mesure  $\mu$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

a)

$$\mu(\emptyset) = 0$$

b)

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

(où  $A_i$  ensemble **mesurable**  $\forall i$  et t.q.  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ )

c)

$$\text{Si } A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

d) Si  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \quad (A_i \in \mathcal{F} \forall i \Leftrightarrow \text{ensembles mesurables})$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \quad (\text{continuité par union croissante})$$

e) Si  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n$  et  $\mu(A_1) < \infty$

( $A_i \in \mathcal{F} \forall i \Leftrightarrow \text{ensembles mesurables}$ )

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \quad (\text{continuité par intersection décroissante})$$

**Exemple 3.4 (Exemples de mesures)**

4.1 Soit  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace mesurable et soit  $A \in \mathcal{T}$ ,  $a \in \Omega$ .

L'application  $\delta_a : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

définit une mesure qu'on appelle **mesure de Dirac de masse 1 concentrée au point**  $a$ .

4.2 Soit encore  $(\Omega, \mathcal{T})$  on appelle mesure dénombrante sur  $\Omega$  l'application  $N : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$A \rightarrow N(A) = \text{nombre d'éléments de } A$

( $N(A)$  définit bien une mesure).

4.3 **Mesure de Borel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^k$  (ou mesure de Lebesgue)**

Dans  $\mathbb{R}$  on définit la longueur  $\ell(I)$  d'un intervalle par

$$\ell([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha, \quad \ell(]-\infty, \alpha]) = +\infty, \quad \ell([\alpha, +\infty[) = +\infty$$

et si  $A$  est une **réunion finie** d'intervalles disjoints, on définit la longueur  $\ell(A)$  de  $A$  comme *la somme des longueurs des intervalles composants*  $A$ .

D'après un théorème fondamental (qu'on ne présente pas ici) on peut étendre  $\ell$  à l'ensemble des boréliens de  $\mathbb{R}$  et définir de **manière unique** la longueur d'un **borélien de  $\mathbb{R}$** .

De la même façon, on définit l'aire d'un borélien de  $\mathbb{R}^2$ , volume d'un borélien de  $\mathbb{R}^3$  etc. . .

On appelle la mesure Borélienne ainsi définie : *mesure de Borel sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  . . . (ou mesure de Lebesgue)*.

### Ensembles de mesure nulle

#### Définition 3.4

- a) Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. On dit qu'une partie  $X$  de  $\Omega$  est de mesure nulle (par rapport à  $\mu$ ) s'il existe un ensemble mesurable  $A$  contenant  $X$  et de mesure  $\mu(A) = 0$ .  
On vérifie qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle.
- b) On dit qu'une propriété  $P$  associée à chaque point de  $\Omega$  est **vraie presque partout** si elle est vraie en chaque point du **complémentaire** d'un ensemble de mesure nulle.
- c) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies sur  $\Omega$  on dit que :  
 $f = g$  **presque partout**  
si l'ensemble  $N$  d'éléments  $x$  t.q.  $f(x) \neq g(x)$  est de mesure nulle.

## 4 Intégrale de Lebesgue

### 1 Intégration d'après Lebesgue

L'intégrale de Riemann qu'on a déjà tous vue et appliquée dans les problèmes de Physique et Mathématiques, peut être aussi utilisée dans des cadres de Maths. appliquées plus exigeants comme c'est le cas de la théorie des Probabilités.

Mais, malheureusement, très souvent on se heurte à des difficultés techniques insurmontables du type par exemple :

Convergence de certaines intégrales ayant comme bornes des *points "mal définis" pour l'intégrand* (ex :  $-\infty, +\infty$ ) ou encore l'intégrale même **au sens de Riemann est mal définie ou elle ne peut pas être définie**.

C'est justement le rôle bénéfique de la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue : d'une part, elle ne fait que des hypothèses "inoffensives" sur les intégrands et les domaines de l'intégration, d'autre part, elle constitue le cadre mathématique adéquat de la théorie des Probabilités que vous allez étudier et appliquer prochainement.

Cette section vient à la suite de celle appelé "Introduction introductive de la théorie de la mesure", et qui avait comme but de vous familiariser avec les mots comme : "tribu", "mesure", "fonction mesurable".

Maintenant ce sont les termes "Intégrale de Lebesgue", "fonction intégrable" d'après Lebesgue, qui seront plus tard un outil indispensable à vos applications.

Dans ce paragraphe on va considérer que des ensembles mesurables et des fonctions mesurables. L'espace mesuré  $\Omega$  sera  $\mathbb{R}^n$  avec la mesure de Lebesgue correspondante.

#### Définition 4.1 (l'intégrale de Lebesgue)

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique mesurable non négative, on définit l'intégrale de Lebesgue de  $f$  notée :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \text{ ou } \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

par :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} \cdot V_n \left( \left\{ x \mid \frac{j}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j+1}{2^k} \right\} \right)$$

o  $V_n(A)$  est le  $n$ -volume d'un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

Pour  $n = 1$  et  $k = 3$ , on donne les figures 1.1 et 1.2 (pour une meilleure concrétisation de cette définition).

#### Remarque 4.1

a) Comme pour l'intégrale de Riemann, on approxime l'intégrale de Lebesgue par en-dessous par des sommes inférieures, mais il y a une différence fondamentale :

Pour l'intégrale de Riemann on découpait l'axe des  $x$  alors que pour l'intégrale de Lebesgue, on découpe l'axe des  $y$ .

*Quand la fonction est continue et l'intégrale de Riemann a un sens, alors les deux intégrales s'identifient.*

b) L'intégrale de Lebesgue satisfait aussi à toutes les propriétés de linéarité et de monotonie (comme celle de Riemann).

---

1. Référence : **P. Brémaud** : "Introduction au Probabilité - Modélisation des phénomènes aléatoires" (Springer - Verlag)

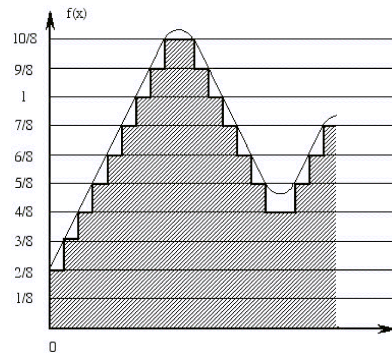


FIGURE 1.1 – Pour  $k = 3$  en hachuré :  $\sum_{j=0}^{k2^k-1} \frac{j}{2^k} V_n \left( \left\{ x \mid \frac{j}{2^k} \leq f(x) \leq \frac{j+1}{2^k} \right\} \right)$

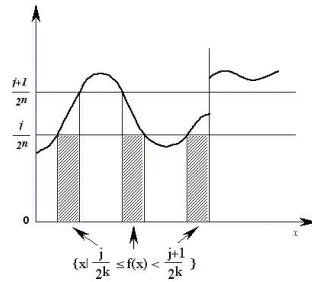


FIGURE 1.2 – Même si  $f(x)$  est continue **par morceaux**, l'intégrale de Lebesgue peut être définie (définition pas réalisable pour l'intégrale de Riemann).

**Définition 4.2**

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable au sens de Lebesgue ssi :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$$

On appelle  $L^1$  l'espace de fonctions intégrables au sens de Lebesgue.

Plus généralement pour  $1 \leq p < \infty$ , on appelle  $L^p$  l'espace de fonctions  $p$  intégrables au sens de Lebesgue :

$$\text{i.e. telles que : } \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx < \infty$$

avec la norme associée :

$$\|f\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{1/p}$$

$L^p$  est un espace de Banach ( $\forall 1 \leq p < \infty$ )

(v. cours de Topologie Ch. 5).

## 5 Probabilités

### 1 Phénomènes-expériences aléatoires

La vie quotidienne, la vie scientifique, la vie culturelle, la vie professionnelle sont composées de phénomènes et d'expériences qui dépendent du **hasard**. On les appelle **phénomènes et expériences aléatoires**. Leur modélisation et leur étude mathématique font l'objet de la théorie des Probabilités.

### 2 Evénements - Espace échantillon

#### Evénement certain ou Espace échantillon :

Ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire représenté par  $\Omega$ , parfois dénommé univers des possibilités, univers, espace échantillon ou **espace fondamental**.

#### Evénement :

Toute partie de  $\Omega$ , tout résultat possible est un événement.

#### Evénements mutuellement exclusifs :

Deux événements  $A$  et  $B$  sont mutuellement exclusifs quand leur intersection est vide :  $A \cap B = \emptyset$ .

#### Evénements élémentaires :

Ils sont représentés en général par  $\{\omega\}$ .

Ils sont par définition mutuellement exclusifs.

Ils ne peuvent pas s'exprimer comme union d'autres événements de  $\Omega$ .

Ils constituent une partition de  $\Omega$  :  $\Omega = \bigcup_i \{\omega_i\}$   $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$ .

Tout événement de  $\Omega$  est union d'une partie de la famille des événements élémentaires.

#### Evénement impossible :

Autre nom de l'événement vide.

#### Classe d'événements intéressants : Tribu

#### Exemple 5.1 (Expérience du dé)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$i = 1 \dots 6 \quad \omega_i = \{i\}$$

$$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_4\} \text{ tribu engendrée par } A : \mathcal{A}_A = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$$

### 3 Mesures de probabilité

#### Définition 5.1

Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace mesurable, on appelle **mesure de probabilité** une fonction  $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

1 -  $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ .

2 -  $P(\Omega) = 1$ .

3 -  $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  famille dénombrable d'événements mutuellement exclusifs :

$$A_i \in \mathcal{A} \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$

#### Remarque 5.1

\*  $P$  est une mesure positive particulière car :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

\* A une expérience aléatoire, on associe :  $\Omega, \mathcal{A}$ (tribu),  $P$ (mesure de probabilité).

Le triplet :  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est appelé **espace de probabilité  $P$  ou espace probabilisé**.

#### 4 Propriétés de la mesure de probabilité

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité alors les propriétés suivantes sont vérifiées par  $P$  :

##### **Théorème 5.1**

$$P(\emptyset) = 0$$

##### **Théorème 5.2**

$$\left. \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, n < \infty \\ \forall i \neq j, (i, j) \in \{0, 1 \dots n\}^2 \\ A_i, A_j \in \mathcal{A} \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) = \sum_{i=0}^n P(A_i)$$

##### **Théorème 5.3**

$$\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 1 - P(A^c) \\ 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$$

##### **Théorème 5.4**

$$\begin{array}{l} \forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \\ \text{et si } B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B) \end{array}$$

##### **Théorème 5.5**

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

##### **Théorème 5.6**

Soit  $\{C_1, \dots, C_n\}$  partition de  $\Omega$  avec :

$$C_i \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \bigcup_{i=1}^n C_i = \Omega \\ \forall i \neq j C_i \cap C_j = \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} \quad P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap C_i)$$

##### **Théorème 5.7**

$$\left. \begin{array}{l} \forall A, B \in \mathcal{A} \\ B \subseteq A \end{array} \right\} \Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

##### **Théorème 5.8 (Inégalité de BOOLE)**

$\forall$  suite finie ou dénombrable  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i)$$

##### **Théorème 5.9**

$$\forall \text{ suite finie ou dénombrable } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow P\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i^c)$$

## 6 Construction d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

### 1 Cas discret ou dénombrable

#### Théorème 6.1

Soient  $\Omega$  espace - échantillon discret,  $\mathcal{A}$  tribu, et une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$   $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , alors :

$$1 - \forall \omega \in \Omega \quad P(\{\omega\}) \geq 0 \text{ et } \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

$$2 - P(\emptyset) = 0.$$

$$3 - \forall A \in \mathcal{A} \text{ et } A \neq \emptyset \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

#### Etapes de la méthode :

1 - Déterminer l'espace des événements élémentaires (Espace échantillon)  $\Omega$ ,  $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} (\omega)$

2 - Construire la tribu  $\mathcal{A}$  des événements intéressants

Souvent on considère l'ensemble des parties de l'espace échantillon  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

3 - Se donner la mesure  $P$  vérifiant les trois points du théorème 6.1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\Omega) = P\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1 \\ \forall \omega \in \Omega, \quad P(\{\omega\}) \geq 0 \\ P(\emptyset) = 0 \\ \forall A \in \mathcal{A} \text{ et } A \neq \emptyset, \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) \end{array} \right.$$

### 2 Modèle uniforme

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espace probabilisé discret ( $\Omega$  fini)

**Définition 6.1 (Mesure de probabilité uniforme)** Les événements élémentaires  $\omega \in \Omega$  ont la même chance de se réaliser :

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\} \quad \forall i = 1 \dots N \exists k \in [0, 1] \quad P(\{\omega_i\}) = k$$

#### Remarque 6.1 (Détermination de $k$ )

$$\text{Comme } 1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^N P(\{\omega_i\}) = N \times k \text{ on a } k = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} = \frac{1}{\text{card}\Omega}$$

#### Propriété 6.1

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  espace probabilisé discret fini avec  $P$  mesure de probabilité uniforme  $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

#### Remarque 6.2

- \* Le problème revient à dénombrer les événements élémentaires de  $\Omega$  (cas possibles) et les événements élémentaires de  $A$  (cas favorables).
- \* Attention : l'équiprobabilité n'est pas toujours vraie.
- \* Cette hypothèse ne peut pas être vérifiée mathématiquement en théorie des probabilités. Ce problème relève des études statistiques.

### 3 Analyse combinatoire

#### Définition 6.2

$p$ -uplet (ou  $p$ -liste) :  $(z_1, \dots, z_p)$   
 2  $p$ -listes sont identiques  $(z_1, \dots, z_p) (z'_1, \dots, z'_p)$  ssi  $\forall i = 1 \dots p \quad z_i = z'_i$  (éléments identiques et dans le même ordre).

#### Définition 6.3

Produit cartésien :  $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_p$   $(x_1, \dots, x_p) \in \Omega$  ( $p$ -liste)  $i = 1 \dots p \quad x_i \in \Omega_i$

#### Principe fondamental de l'analyse combinatoire :

$$\text{card}\Omega = \prod_{i=1}^p \text{card}\Omega_i \text{ avec } \Omega = \{(z_1, \dots, z_p) / i = 1 \dots p, z_i \in \Omega_i\} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_p$$

#### Arrangements avec répétition ou $p$ -listes

#### Définition 6.4

Ensemble d'arrangements avec répétition ( $p$ -listes) de  $p$  éléments parmi  $n$  :  
 Dispositions ordonnées de  $p$  éléments parmi  $n$  avec répétition possible d'un ou plusieurs éléments  $p$ -uplets possibles.

#### Théorème 6.2

$$\text{card}(\{p\text{-listes de } n \text{ éléments}\}) = n^p$$

#### Arrangements sans répétition

#### Définition 6.5

Ensemble d'arrangements sans répétition (ou Arrangement) :  
 Dispositions ordonnées de  $p$  éléments parmi  $n$  sans répétition.

#### Théorème 6.3 Cardinal des Arrangements

$$A_n^p \text{ (ou } (n)_p) = n(n-1) \dots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ avec } p \leq n$$

**Permutations**

Notation :  $\varpi$ .

**Définition 6.6**

Ensemble de **permutations sans répétition**  
Arrangements de  $n$  éléments parmi  $n$  éléments distincts

**Théorème 6.4**

$$\text{card}\varpi = \text{card}A_n^n = n!$$

**Permutations avec répétition****Définition 6.7**

Ensemble de **permutations avec répétition (ou partitions)** de  $n$  éléments divisés en  $k$  groupes distincts d'éléments identiques (dispositions ordonnées).

**Théorème 6.5**

$$\text{card}(\varpi_n)^{n_1 \dots n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} = \binom{n}{n_1 \dots n_k}$$

**Combinaisons****Définition 6.8**

Ensemble de **combinaisons sans répétition** (ou combinaisons)  
Dispositions non ordonnées et sans répétition de  $p$  éléments parmi  $n$

**Exemple 6.1**

$\Omega_0 = \{a, b, c\}$   
 $n = 3, p = 2 \Rightarrow 3$  combinaisons :  $(a, b), (a, c), (b, c)$

**Notation :**

$$\binom{n}{p} \text{ ou } C_n^p$$

**Identité :**

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

**Théorème 6.6**

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**Remarque 6.3**

$C_n^p$  est un cas particulier d'une partition (**permutation avec répétition**) d'un ensemble de  $n$  éléments en 2 groupes de  $p$  et de  $(n - p)$  éléments.

**Combinaisons avec répétition**

**Définition 6.9**

Ensemble de **combinaisons avec répétition** :  $p$  éléments parmi  $n$  éléments distincts  
Dispositions non ordonnées de  $p$  éléments parmi  $n$  avec répétition possible

**Exemple 6.2**

$\Omega_0 = \{a, b, c\}$   
 $n = 3, p = 2 \Rightarrow (a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)$

**Remarque 6.4**

$p$  peut être supérieur à  $n$ .

Pour le dénombrement : **problème d'occupation**.  
 $n$  cellules distinctes,  $p$  boules identiques

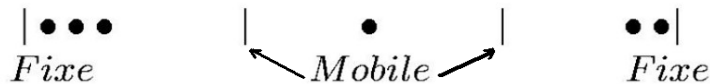


FIGURE 1.3 -  $n = 3, p = 6$

**Exemple 6.3** (v.figure 1.3)

$n = 3, p = 6 \Rightarrow$  Combinaisons avec répétition de  $p$  éléments parmi  $n$  éléments. Si on a  $n$  cellules, on a  $(n - 1)$  cloisons mobiles. On fait le dénombrement de toutes les combinaisons possibles de  $(n + p - 1)$  éléments en deux sous-groupes :

- \* l'un contenant  $(n - 1)$  éléments (cloisons);
- \* l'autre contenant  $p$  éléments (boules).

$$card\omega = \frac{(n - 1 + p)!}{(n - 1)!p!} = \binom{n + p - 1}{p} = C_{n+p-1}^p$$

**Cardinalité des espaces échantillons pour le modèle de l'urne et le problème d'occupation :**

Tirage de $N$ éléments parmi $M$ éléments distincts (modèle de l'urne)			
Tirage	Avec ordre	Sans ordre	
Sans remise	$(M)_N = A_M^N$	$\binom{M}{N} = C_M^N$	Sans répétition
Avec remise	$M^N$	$\binom{M + N - 1}{N} = C_{M+N-1}^N$	Avec répétition
	Boules distinctes	Boules identiques	Distribution
Distribution de $N$ boules dans $M$ cellules distinctes (problème d'occupation)			

## 7 Construction d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - Cas Continu

**Cas particulier (et le plus intéressant).**

$$\Omega = \mathbb{R}$$

1.  $\Omega = \mathbb{R}$

2.  $\mathcal{A} = \mathcal{R}$  (ensemble des boréliens de  $\mathbb{R}$ )

**Rappel :**

$\mathcal{R}$  contient tous les intervalles et les points isolés de  $\mathbb{R}$

$\mathcal{R}_A$  : tribu des boréliens associée à l'événement  $A \in \mathcal{R}$

3. Pour définir  $P$ , on a le théorème suivant :

### **Théorème 7.1**

Soit  $P$  une mesure de probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ . Alors  $P$  est déterminée de façon unique par ses valeurs sur les intervalles du type

$$]-\infty, x] \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

### **Théorème 7.2**

Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

1.  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

2.  $f$  admet au plus un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle fini de  $\mathbb{R}$ .

3.  $f$  est intégrable (au sens de Lebesgue) et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Si  $P : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par

$$P[A] = \int_A f(x)dx \quad \forall A \in \mathcal{R}$$

alors  $P$  est une mesure de probabilité.

On obtient ainsi  $(\Omega, \mathcal{R}, P)$ . On appellera  $f$  : fonction de densité.

### **Preuve du théorème 7.2**

La propriété 1 de la définition d'une mesure de probabilité est vérifiée car

$$P[A] = \int_A f(x)dx \geq 0.$$

La propriété 2 est aussi vérifiée car

$$P[\mathbb{R}] = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

La propriété 3 est aussi vérifiée car si  $A_1 \dots A_n$  est une suite décroissante d'événements mutuellement exclusifs, il nous faut montrer que :

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i].$$

En effet,

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x) dx.$$

Propriétés vraies pour toute famille d'ensembles mesurables donc boréliens (et tels que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ) ssi  $f$  est intégrable sur  $A_i \forall i \in \mathbb{N}$ .

### Remarque 7.1

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R} \quad P([a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \{y\} \in \mathcal{R} \text{ et } \Rightarrow P[\{y\}] = \int_{\{y\}} f(x) dx = 0$$

Si  $A \in \mathcal{R}$  est fini ou infini dénombrable  $\Rightarrow P[A] = 0$ .

Le théorème 7.2 s'applique aussi dans le cas où  $\Omega$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Il suffit de prendre  $f(x) = 0 \forall x \notin \Omega$  et  $\int_{\Omega} f(x) dx = 1$ .

### Conclusion (Comparaison)

#### Cas discret

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$P[\Omega] = 1$$

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] \geq 0$$

$$P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}]$$

#### Cas continu

$(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P)$  avec  $f$  fonction de densité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$P[A] = \int_A f(x) dx \quad \forall A \in \mathcal{R}$$

### Exemple 7.1

Durée de service d'une pièce d'équipement  $\Omega = [0, +\infty[$  (ou  $\Omega = \mathbb{R}^+$ ) avec :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } \lambda > 0 \end{cases}$$

On voit que toutes les conditions du théorème 7.2 sont vérifiées :

$f(x) \geq 0$  et  $f$  continue sauf pour  $x = 0$ , et comme  $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -[e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\text{et } \forall A \in \mathcal{R} \quad P[A] = \int_{A \cap [0, +\infty[} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

On cherche la probabilité de l'événement  $A$  : "la durée de service supérieure à  $y$  heures".

$$P[A] = \int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda y}$$

### Exemple 7.2

Espace de probabilité pour l'expérience aléatoire : choisir au hasard un nombre sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On définit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$f$  vérifie le théorème 7.2 car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 1.dx = 1 \text{ et } \forall A \in \mathcal{R} \quad P[A] = \int_{A \cap [0, 1]} 1.dx;$$

$$P([a, b]) = \int_a^b 1.dx = b - a \text{ est la probabilité pour que le nombre choisi soit dans } [a, b].$$