

INTRODUCTION AUX PROBABILITES

II

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2013-2014

Table des matières

	Probabilités	5
2	Probabilité conditionnelle et indépendance	5
1	Probabilité Conditionnelle	5
1	1 Définitions-Propriétés	5
2	2 Formule de Bayes	7
2	Indépendance	7
1	1 Evénements indépendants	7
2	2 Familles indépendantes	8
3	3 Expériences indépendantes \Rightarrow espaces produits	9
4	4 Indépendance pour un exemple cas continu	9

Chapitre 2

Probabilité conditionnelle et indépendance

1 Probabilité Conditionnelle

1 Définitions-Propriétés

Définition 1.1 (*déf. préliminaire pour le cas discret d'un modèle uniforme*) Probabilité conditionnelle ou "Probabilité que A se réalise sachant que l'événement B s'est réalisé".

$$P[A | B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

Exemple 1.1 (les boules...) 5 boules dans une urne dont 3 rouges et 2 bleues.

On tire 2 boules (sans remise) (et sans regarder la première).

$A = \left\{ \text{la 2}^{\text{ème}} \text{ boule est rouge} \right\}$.

Si au 1^{er} tirage la boule est rouge $P_1[A] = \frac{1}{2} = \left(\frac{2}{4}\right)$

Si au 1^{er} tirage la boule est bleue $P_2[A] = \frac{3}{4}$

Exemple 1.2 (Skieur...)

A représente l'événement d'au moins une chute par descente et B l'événement de descentes sur une piste rouge.

$n_{A \cap B}$ représente le nombre de descentes avec une chute au moins sur une piste rouge.

n_B représente le nombre de descentes sur une piste rouge.

$P[A | B]$ représente la probabilité d'une chute au moins par descente en skiant sur les pistes rouges ; d'après le modèle uniforme :

$$P[A | B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

En divisant par n (nombre total de descentes, i.e $\text{card}(\Omega)$) on aura une autre définition :

$$P[A | B] = \frac{n_{A \cap B}/n}{n_B/n} = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Définition 1.2

$$P[A | B] == \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = P[A]_B = P_B[A]$$

Exemple 1.3 (Boules (suite))

$$\Omega = \{\text{couples ordonnés}\} \Rightarrow \text{card}\Omega = A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20$$

$$\text{Si } B = \{1^{\text{ère}} \text{ boule rouge}\} \text{ alors } \begin{cases} \text{card}B = 3 \times 4 = 12 \\ \text{card}A \cap B = 2 \times 3 = 6 \\ P[A | B] = \frac{\frac{6}{12}}{\frac{20}{20}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } B = \{1^{\text{ère}} \text{ boule bleue}\} \text{ alors } \begin{cases} \text{card}B = 2 \times 4 = 8 \\ \text{card}A \cap B = 2 \times 3 = 6 \\ P[A | B] = \frac{\frac{6}{8}}{\frac{20}{20}} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Définition 1.3 Définition générale de la probabilité conditionnelle

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{A}$ avec $P[B] > 0$.

L'espace de probabilité conditionnelle par rapport à B pour tout modèle est donné par $(\Omega, \mathcal{A}, P_B)$ avec :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad P_B[A] = P[A | B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Attention : Pour établir cette définition, il a fallu montrer d'abord que $P_B[A]$ est bien une mesure de probabilité.

Théorème 1.1

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et $B \in \mathcal{A}$ avec $P[B] > 0$

- * Si $B \subseteq A$ et $A \in \mathcal{A}$, alors $P[A | B] = 1$
- * Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P[A \cap B] = P[A | B] \times P[B]$ (loi de multiplication)
- * Si $0 < P[B] < 1$, alors $\forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] = P[A | B] \times P[B] + P[A | B^c] \times P[B^c]$

Théorème 1.2 (“Loi de multiplication généralisée”)

Si $\{B_i\}_{i=1..n} \subset \mathcal{A}$ avec $P[B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}] > 0$ alors :

$$P \left[\bigcap_{i=1}^n B_i \right] = P \left[B_n \left| \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \right. \right] \times P \left[B_{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n-2} B_i \right. \right] \times \dots \times P[B_2 | B_1] \times P[B_1]$$

2 Formule de Bayes

Problème :

Si on n'a pas d'information nécessaire pour évaluer $P[A]$,
 Si pour $\{B_1 \dots B_n\} \subset \mathcal{A}$ (partition de Ω),
 on connaît $P[A|B_i] \forall i = 1 \dots n$, on connaît $P[B_i] \forall i = 1 \dots n$
 alors comment faire pour trouver $P[A]$ et $P[B_i|A] \forall i = 1 \dots n$?

Théorème 1.3

Soit : $(\Omega, \mathcal{A}, P), \{B_1 \dots B_n\}$, une partition de Ω avec :
 $B_i \in \mathcal{A}$ et $P[B_i] > 0 \quad \forall i = 1 \dots n$

$$\implies \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad P[A] = \sum_{i=1}^n P[A|B_i] \times P[B_i]$$

Preuve

$$\begin{aligned} P[A] &= P[A \cap \Omega] \\ &= P\left[A \cap \bigcup_{i=1}^n B_i\right] \\ &= P\left[\bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n P[A \cap B_i] \\ &= \sum_{i=1}^n P[A|B_i] \times P[B_i] \end{aligned}$$

Théorème 1.4 (Formule de Bayes)

Avec les mêmes conditions qu'au théorème 1.3, on a :

$$P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i] \times P[B_i]}{\sum_{j=1}^n P[A|B_j] \times P[B_j]} = \frac{P[A \cap B_i]}{P[A]}$$

2 Indépendance

1 Événements indépendants

Définition 2.1

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) .
 A et $B \in \mathcal{A}$ sont **indépendants** ou **stochastiquement indépendants**, ssi :

$$P[A \cap B] = P[A] \times P[B]$$

(autrement : $P[A|B] = P[A]$).

Si $P[A \cap B] \neq P[A] \times P[B]$ alors on dit que, A et B sont **dépendants** ou **liés**.

Attention :

Ne pas confondre, **événements indépendants** et événements mutuellement exclusifs.

Exemple 2.1

Pour montrer que la notion de l'indépendance n'est pas une notion intuitive : on lance une pièce de monnaie 3 fois.

$$\Omega = \{(\Pi, \Pi, \Pi), (\Pi, \Pi, F), (\Pi, F, \Pi), (\Pi, F, F), (F, \Pi, \Pi), (F, \Pi, F), (F, F, \Pi), (F, F, F)\}$$

$A = \{ \text{"Pile à chacun des deux premiers lancers"} \}$

$B = \{ \text{"Pile au troisième lancer"} \}$

$C = \{ \text{"au moins deux piles"} \}$

D'après le modèle uniforme $\text{card}\Omega = 2^3$

$$\left. \begin{aligned} P[A] &= \frac{2}{8} & P[B] &= \frac{4}{8} & P[C] &= \frac{4}{8} \\ P[A \cap B] &= P(\{\Pi, \Pi, \Pi\}) = \frac{1}{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A, B \text{ indépendants}$$

$$P[A \cap C] = \frac{1}{8} \neq P[A] \times P[C] = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow A, C \text{ dépendants}$$

$$P[B \cap C] = \frac{3}{8} \neq P[B] \times P[C] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow B, C \text{ dépendants}$$

Théorème 2.1

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, et supposons que $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$ soient deux événements indépendants : $P[A \cap B] = P[A] \times P[B]$ alors :

1. A et B^c sont indépendants

Preuve :

$$P[A \cap B^c] = P[A] - P[A \cap B] = P[A] \times (1 - P[B]) = P[A] \times P[B^c]$$

2. A^c et B sont indépendants

Preuve :

$$P[A^c \cap B] = P[B] - P[A \cap B] = P[B] \times (1 - P[A]) = P[A^c] \times P[B]$$

3. A^c et B^c sont indépendants

Preuve :

$$P[A^c \cap B^c] = P[A^c] - P[A^c \cap B] = P[A^c] \times (1 - P[B]) = P[A^c] \times P[B^c]$$

2 Familles indépendantes**Définition 2.2**

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) et soient deux familles d'événements $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$

Alors \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 sont indépendantes, *ssi*

$$\forall A_i \in \mathcal{A}_1 \text{ et } A_j \in \mathcal{A}_2, A_i \text{ et } A_j \text{ sont indépendants} \Leftrightarrow P[A_i \cap A_j] = P[A_i] \times P[A_j]$$

Définition 2.3

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) et $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}$.
Les A_1, \dots, A_n sont **mutuellement indépendants ssi**

$$P \left[\bigcap_{i=1}^l A_{\alpha_i} \right] = \prod_{i=1}^l P[A_{\alpha_i}],$$

pour toute sous-famille $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_l}\}$ de $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$.

Remarque 2.1

L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux mais la réciproque est fautive.

3 Expériences indépendantes \Rightarrow espaces produits**Expériences de BERNOUILLI (ou suites de BERNOUILLI) :**

Une suite de n épreuves de Bernouilli¹ est une succession de n épreuves indépendantes à deux issues possibles : succès ou échec. $p_s = p, p_e = 1 - p_s = q$

Exemple 2.2

- N lancers d'un dé (on veut par exemple $\{6\}$)
- N tirages d'une boule blanche dans une urne avec remise.
- On lance la roue n fois. Soit p la probabilité d'obtenir le secteur rouge (succès) et q la probabilité pour un échec. On cherche la probabilité pour gagner k fois. On a le :

Théorème 2.2

Pour une suite de n épreuves de BERNOUILLI, la probabilité d'obtenir k succès $P(k)$ au cours de n épreuves est :

$$P[k] = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

(Vérification que P est une mesure de probabilité) :

$$P[k] \geq 0; \quad P[\Omega] = \sum_{k=1}^n P[k] = \sum_{k=1}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

4 Indépendance pour un exemple cas continu**Exemple 2.3**

On choisit au hasard un nombre dans $[0, 1]$

Rappel :

Espace de probabilité : (Ω, \mathcal{A}, P) avec $\Omega = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{R}[0, 1]$ et $P[A] = \int_A dx \quad \forall A \in \mathcal{R}$.

1. J. BERNOUILLI 1654-1705 Mathématicien suisse parmi les premiers à étudier ce problème

Pour les événements $A = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $B = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$, $C = \left[\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right]$

$$\left. \begin{aligned}
 P[A] &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx = \frac{1}{2} \\
 P[B] &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 1 \cdot dx = \frac{1}{2} \\
 P[A \cap B] &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx = \frac{1}{4}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ et } B \text{ indépendants}$$

$$\left. \begin{aligned}
 P[C] &= \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{7}{8}} 1 \cdot dx = \frac{1}{2} \\
 P[A \cap C] &= \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{4}{8}} 1 \cdot dx = \frac{1}{8}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \text{ et } C \text{ dépendants}$$

$$P[B \cap C] = \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{6}{8}} 1 \cdot dx = \frac{3}{8} \Rightarrow B \text{ et } C \text{ dépendants}$$