

INTRODUCTION AUX PROBABILITES

III-IV

Support du cours donné en 1^{re} année
par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2013-2014

Table des matières

	Probabilités	5
3	Variables aléatoires	5
1	Variables aléatoires	5
1	Espace de Probabilité induit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$	5
2	Exemples	6
2	Fonction de répartition-Fonction de masse	7
1	Cas discret	8
2	Cas continu	10
4	Espérance mathématique -Variance	13
1	Espérance ou moyenne $E[X]$	13
1	Espérance Mathématique (Cas : Discret et Continu)	13
2	Moments d'une variable	14
2	Variance	15

Chapitre 3

Variables aléatoires

1 Variables aléatoires

Définition 1.1 (Variable aléatoire)

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable, alors l'application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si :

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R} \quad \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \\ \Leftrightarrow & X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{R} \\ \Leftrightarrow & X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et t.q.} \quad \forall A \in \mathcal{R}, \quad X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Cas discret : Toute fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Cas continu : $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{R})$.

On vérifie que : Toute fonction continue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et toute fonction monotone $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$.

Exemple 1.1

Expérience aléatoire : Lancement de 2 dés équilibrés

A- variable aléatoire : $X(\omega) = x + y$ si $\{\omega = (x, y)\}$
 \Leftrightarrow {la somme des résultats sur les 2 dés}

B- variable aléatoire : $\begin{cases} Y(\omega) = x & \text{si } \omega = (x, 3) \\ Y(\omega) = 0 & \text{si } \omega = (x, y) \quad \text{et } y \neq 3 \end{cases}$
 \Leftrightarrow la valeur du résultat sur le premier dé quand le second donne 3.

1 Espace de Probabilité induit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$

Définition 1.2 (Probabilité $P_X[A]$)

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité.

$$\begin{aligned} X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \quad \forall A \in \mathcal{R} \quad P_X[A] = P[\{X \in A\}] & \Leftrightarrow P[\{\omega : X(\omega) \in A\}] \\ & \Leftrightarrow P[X^{-1}[A]] \end{aligned}$$

Théorème 1.1

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) espace de probabilité.

Si X variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) alors $P_X[A] = P[\{X \in A\}] \equiv P[X^{-1}[A]]$ est une mesure de probabilité.

Définition 1.3 (“Loi de probabilité de X ”)

(Ω, \mathcal{A}, P) espace de probabilité. X variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) .

\Rightarrow **espace de probabilité induit** par la variable aléatoire $X : (\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$ où $P_X :$

$$\forall A \in \mathcal{R} \quad P_X [A] = P [\{\omega : X(\omega) \in A\}]$$

2 Exemples**Exemple 1.2 (Expérience de 2 dés)**

$$\Omega = \{(i, j), i = 1 \dots 6, j = 1 \dots 6\}$$

$$\text{card}\Omega = 36$$

$$P[\{\omega\}] = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$X = x + y \quad x = 1 \dots 6, y = 1 \dots 6$$

$$\begin{aligned} P_X [\{12\}] &= P [\{\omega : X(\omega) = 12\}] \\ &= P [\{(6, 6)\}] \\ &= \frac{1}{36} \\ P_X []8, 9[] &= P [\{\omega : 8 < X(\omega) < 9\}] \\ &= P [\emptyset] \\ &= 0 \\ P_X []4, 8[] &= P [\{\omega : 4 \leq X(\omega) < 8\}] \\ &= P [\{(1, 3), (3, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), (5, 1), (1, 5), \\ &\quad (2, 4), (4, 2), (3, 3), (1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}] \\ &= \frac{18}{36} \\ &= \frac{1}{2} \\ P_X []11, +\infty[] &= P [\{\omega : 11 \leq X(\omega) < +\infty\}] \\ &= P [\{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}] \\ &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Exemple 1.3 (Expérience aléatoire (chaîne de production))

Classifier : pièce défectueuse (d) ou pièce acceptable (a).

$$\Omega = \{a, d\} \quad (\Omega, P[\Omega], P) \quad \begin{aligned} P[\{a\}] &= p \quad \text{associée à la pièce acceptable} \quad (0 < p < 1) \\ P[\{d\}] &= 1 - p \quad \text{associée à la pièce défectueuse} \end{aligned}$$

Variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$X(a) = 1; \quad X(d) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} P_X [1] = P[\{a\}] = p \\ P_X [0] = P[\{d\}] = 1 - p \end{cases}$$

2 Fonction de répartition-Fonction de masse

Définition 2.1 Fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Remarque : On a la même définition dans le cas discret ou le cas continu.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Soit X , une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) .

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$ espace de probabilité induit par la variable aléatoire X .

On définit la fonction F_X appelée fonction de répartition, $\forall X \in \mathbb{R}$, par

$$F_X(x) = P_X[[-\infty, x]] = P[\{X \leq x\}]$$

Définition 2.2 Fonction de masse d'une variable aléatoire.

Soit X , une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A})

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$ espace de probabilité induit par la variable aléatoire X .

On définit la fonction p_X appelée fonction de masse,

$\forall X \in \mathbb{R}$:

$$p_X(x) = P_X[\{x\}] = P[\{X = x\}]$$

On définit aussi :

$$\begin{cases} p_X(-\infty) = P_X[\{-\infty\}] = 0 \\ p_X(+\infty) = P_X[\{+\infty\}] = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.1

On considère l'expérience de la classification des pièces défectueuses ou non. On obtient la fonction de répartition suivante :

$$\begin{cases} F_X(x) = P_X[[-\infty, x]] = 0 & \text{si } x < 0 \\ = 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ = 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et la fonction de masse suivante :

$$\begin{cases} p_X(x) = 1 - p & \text{si } x = 0 \\ = p & \text{si } x = 1 \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Théorème 2.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Soit X , une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A})

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$, un espace de probabilité induit par la variable aléatoire X

Soit $p_X(x)$ la fonction de masse, et $F_X(x)$ la fonction de répartition

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \bullet F_X \text{ est non décroissante} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 \\ \bullet F_X \text{ est continue à droite (mais pas forcément continue à gauche)} \\ \bullet \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y < x}} F_X(y) = F_X(x) - p_X(x) \end{cases}$$

Théorème 2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Soit X , une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) .

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$, un espace de probabilité induit par la variable aléatoire X .

Soit $p_X(x)$, la fonction de masse et soit $F_X(x)$ la fonction de répartition.

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet P_X[a, b] = F_X(b) - F_X(a) \\ \bullet P_X[a, b[= F_X(b) - F_X(a) - p_X[b] \\ \bullet P_X][a, b] = F_X(b) - F_X(a) + p_X[a] - p_X[b] \\ \bullet P_X][a, b] = F_X(b) - F_X(a) + p_X[a] \\ \bullet P_X[a, +\infty[= 1 - F_X(a) \\ \bullet P_X][a, +\infty[= 1 - F_X(a) + p_X[a] \\ \bullet P_X[-\infty, b] = F_X(b) - p_X[b] \end{cases}$$

1 Cas discret

Remarque 2.1 D'après le théorème 2.1

$$p_X(x) = F_X(x) - \lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y < x}} F_X(y)$$

$$\Leftrightarrow$$

Si $p_X(x) \neq 0$, F_X est discontinue en x et p_X représente la "hauteur du saut" de F_X en x .

Théorème 2.3

Soit X une variable aléatoire avec fonction de masse p_X . L'ensemble :

$$D_X = \{x : p_X(x) > 0\}$$

est discret.

Définition 2.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Soit X , une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A}) avec $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, P_X)$ espace de probabilité induit par la variable aléatoire X .

Soit p_X , sa fonction de masse.

X est une **variable aléatoire discrète ssi** :

1. $\{x : p_X(x) > 0\} \equiv D_X \neq \emptyset$
2. $\sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1$

D_X est appelé **support** de la variable aléatoire discrète

Exemple 2.2

L'exemple du test des pièces défectueuses et acceptables est un exemple de variable aléatoire discrète avec $\Omega = \{a, d\}$, $D_X = \{0, 1\}$, $P[\{a\}] = p$, $P[\{d\}] = 1 - p$:

$$\sum_{x \in D_X} p_X(x) = p_X(0) + p_X(1) = 1 - p + p = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exemple 2.3

Soit X une variable aléatoire ayant pour fonction de répartition F_X où :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

F_X est continue et $\forall x \in \mathbb{R}$, $D_X = \emptyset$. Donc X n'est pas une variable aléatoire discrète.

Exemple 2.4

Soit X une variable aléatoire ayant comme fonction de répartition F_X où :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1+x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$D_X = \{0, 1\}$$

$$\sum_{x \in D_X} p_X(x) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 1$$

\Rightarrow

X n'est pas une variable aléatoire discrète.

Théorème 2.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$

Soit X , une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A})

Soit $p_X(x)$, la fonction de masse et D_X , le support

$$\forall B \in \mathcal{R} \quad P_X[\{X \in B\}] = \begin{cases} 0 & \text{si } B \cap D_X = \emptyset \\ \sum_{x \in B \cap D_X} p_X(x) & \text{si } B \cap D_X \neq \emptyset \end{cases}$$

Remarques sur les variables aléatoires discrètes :

Comment construire une variable aléatoire discrète

Données :

1. Un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}$ discret

2. Une application $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \forall x \notin D \\ p(x) > 0 & \forall x \in D \\ \sum_{x \in D} p(x) = 1 \end{cases}$$

3. Définir :

$$\forall B \in \mathcal{R}, \quad p_X[\{X \in B\}] = \sum_{x \in B \cap D} p(x)$$

avec :

$$\sum_{x \in B \cap D} p(x) = 0 \quad \text{si } B \cap D = \emptyset$$

2 Cas continu

Théorème 2.5

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, un espace probabilisable

Une mesure de probabilité P est déterminée d'une façon unique par ses valeurs sur les intervalles $]-\infty, x]$ (boréliens).

Définition 2.4 (Fonction de densité de probabilité)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de densité si :

- * $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- * f admet au plus un nombre fini de discontinuités quelque soit l'intervalle fini de \mathbb{R} .
- * f intégrable (au sens de Lebesgue) et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Définition 2.5 (Support C_X d'une variable aléatoire continue X)

$$C_X = \{x : f(x) > 0\}$$

Remarque 2.2 Détermination de $F_X(x)$ étant donnée f_X :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P_X[]-\infty, x] = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Théorème 2.6

Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, un espace probabilisable

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de densité.

Si l'application $P : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{R}, \quad P[A] = \int_A f(x)dx$$

(au sens de Lebesgue),

alors P est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$

Définition 2.6 Une variable est dite continue si $\forall x \in \mathbb{R}$, sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

(au sens de Lebesgue) avec f_X , fonction de densité.

Exemple 2.5

Soit X une variable aléatoire ayant comme fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}^{+*}$$

On vérifie que f_X est une fonction de densité.

On remarque que cette fonction est continue partout, dérivable partout sauf en 0 et $F'_X = f_X(x)$ pour $x \neq 0$

Théorème 2.7

Soit X variable aléatoire continue avec $C_X \neq \emptyset$, f_X et F_X (fonction de densité et de répartition) et F_X continue alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } f_X \text{ continue en } x \text{ alors } F_X \text{ dérivable en } x \text{ et } F'_X(x) = f_X(x) \\ \bullet D_X = \{x | p_X(x) > 0\} = \emptyset \quad (P_X(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}) \\ \bullet \forall I \subset \mathbb{R}, \quad P[\{X \in I\}] = \int_I f_X(x) dx \\ \bullet \forall A \in \mathcal{R}, \quad P[\{X \in A\}] = \int_{A \cap C_X} f_X(x) dx \end{array} \right.$$

Théorème 2.8

Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

1. F est non décroissante
2. F est continue à droite
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

et si on définit G par :

$$G[] - \infty, x] = F[x] \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors G est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ et F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire ayant G comme loi de probabilité.

Conclusion 1 : Détermination d'une var. al. continue X à partir de f_X

* C_X intervalle de \mathbb{R} (support de X)

* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

- $f(x) > 0$ si $x \in C_X$
- $f(x) = 0$ si $x \notin C_X$
- f admet un nombre fini de discontinuités sur chaque intervalle fini de \mathbb{R}

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (f intégrable)
- $P[\{X \in B\}] = \int_B f(x)dx = \int_{B \cap C_X} f(x)dx \forall x \in \mathcal{R}$
- Sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

(au sens de Lebesgue)

Conclusion 2 : Détermination d'une var. al. continue X à partir de F_X

Pour vérifier que X est une variable aléatoire continue (étant donnée F_X), il faut que la dérivée F'_X vérifie les propriétés suivantes :

1. F'_X existe sauf en, au plus, un nombre fini de points
2. $F'_X \geq 0$
3. F'_X continue sur chaque intervalle où elle est définie
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} F'_X(x)dx = 1$

Chapitre 4

Espérance mathématique - Variance

1 Espérance ou moyenne $E[X]$

(autres notations) :

$$E[X] = \mu_X = m_X$$

1 Espérance Mathématique (Cas : Discret et Continu)

Définition 1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et X une variable aléatoire sur (Ω, \mathcal{A})

a. *Espérance mathématique $E[X]$ d'une var. aléatoire discrète :*

Soit D_X le support et p_X la fonction de masse de X alors :

$$E[X] = \sum_{x \in D_X} xp_X$$

b. *Espérance mathématique $E[X]$ d'une var. aléatoire continue :*

Soit C_X le support et f_X la fonction de densité de X alors :

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$$

Remarque 1.1

1. Souvent la valeur de l'espérance n' appartient pas au support de la variable aléatoire
2. Pour le cas discret, l'espérance est équivalente à la moyenne arithmétique des valeurs de X pondérées par leur probabilité
3. L' existence de $E[X]$ (ou μ_X) est équivalente à l'étude de la convergence absolue de la série ou de l'intégrale au sens de Lebesgue.
4. *Interprétation physique de la moyenne dans le cas discret :*
On a pour exemples :
 - a) le centre de gravité des corps matériels ;
 - b) la distribution de probabilité en moyenne - pour les bactéries en biologie ;
 - c) appels téléphoniques ou pannes dans la vie courante.

5. *Interprétation physique de la moyenne dans le cas continu :*

- Moyenne de densité de probabilité de présence des particules, ou de densité de probabilité des niveaux d'énergie en mécanique quantique.
- Temps moyen d'attente devant les guichets d'une banque, d'une poste etc..., temps moyen d'attente de fichiers dans une imprimante etc...
- Temps moyen d'attente avant la première panne d'un appareil, etc...

2 Moments d'une variable

Définition 1.2 (Moment d'une variable aléatoire)

On définit $\mu'_k = E[X^k]$ appelé $k^{\text{ième}}$ moment de la variable aléatoire X par rapport à l'origine.

Définition 1.3

On définit : $\mu_k = E[(X - \mu_X)^k]$ appelé $k^{\text{ième}}$ moment de la variable aléatoire X par rapport à la moyenne μ_X .

Remarque 1.2

1. pour $k = 1$ $\mu'_1 = \mu_X = E[X]$
2. pour $k = 1$ $\mu_1 = E[(X - \mu_X)] = \mu_X - \mu_X = 0$
3. $\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2]$. *Interprétation physique : Moment d'inertie.*
4. Si $\forall x \in D_X$ (ou si $\forall x \in C_X$) $x = C$ (constante réelle) alors :

$$E[C] = \sum_{x \in D_X} xp_X(x) = \sum_{x \in D_X} Cp_X(x) = C \sum_{x \in D_X} p_X(x) = C$$

ou,

$$E[C] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} Cf_X(x)dx = C \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = C.$$

2 Variance

Définition 2.1 (Variance σ_X^2 et écart-type σ_X)

Soit X variable aléatoire. On appelle **variance de X** le moment :

$$\mu_2 = E[(X - \mu_X)^2] = \text{var}[X] = \sigma_X^2$$

Ecart-type de X : $\sqrt{\sigma_X^2} = \sigma_X$

Remarque 2.1

1. μ_X (la moyenne ou espérance) est une mesure de localisation pour la var. aléatoire X .
2. σ_X^2 est une mesure de dispersion pour la var. aléatoire X .
3. $\sigma_X^2 > \sigma_Y^2 \Leftrightarrow$ le support de la variable aléatoire X est plus dispersé que celui de Y (au sens de la loi de probabilité).

Théorème 2.1

Si X variable aléatoire de variance σ_X^2

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \mu'_2 - \mu_X^2$$

ou

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - E^2[X]$$

Théorème 2.2

Soit X variable aléatoire de moyenne μ_X et de variance σ_X^2 .

Définissons la var. aléatoire $Y = aX + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \mu_Y = a\mu_X + b \quad \text{et} \quad \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

(linéarité de l'espérance et non-linéarité de la variance)

Démonstration :

$$\mu_Y = E[Y] = E[aX + b] = E[aX] + E[b] = aE[X] + b = a\mu_X + b$$

et

$$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - E^2[Y] = E[a^2X^2 + b^2 + 2abX] - a^2\mu_X^2 - b^2 - 2ab\mu_X = a^2\sigma_X^2$$

Théorème 2.3

Soit X variable aléatoire de moyenne μ_X et de variance $\sigma_X^2 \neq 0$, si

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

\Rightarrow

$$\mu_Y = 0; \quad \sigma_Y^2 = 1$$

Y est appelée variable aléatoire centrée réduite.

Démonstration :

Par application du théorème précédent (avec $a = \frac{1}{\sigma_X}$ et $b = \frac{-\mu_X}{\sigma_X}$) on écrit :

$$E[Y] = E\left[\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right] = \frac{1}{\sigma_X}(\mu_X - \mu_X) = 0$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1$$