INTRODUCTION AUX PROBABILITES
V-VI

Support du cours donné en 1^{re} année

par Marietta Manolessou
EISTI - Département Mathématiques

Année 2013-2014

Table des matières

Quelques lois de probabilités discrètes

1 Loi de Bernoulli

On considère l'expérience de Bernoulli où on a deux issues possibles, s =succès et e =échec, donc l'espace fondamental est : $\Omega = \{s,\ e\}$.

Définition 1.1 On pose :

$$P[\{s\}] = p \quad \text{avec } 0 < p < 1.$$

On introduit l'application :

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^+ \qquad \text{avec} \quad x(s) = 1 \quad \text{et} \quad x(e) = 0$$

On définit ainsi X *une variable aléatoire discrète qui suit une* ***loi de Bernoulli*** *avec paramètre* p

$$\Leftrightarrow\ X : B(p)$$

ayant comme :

Support *:*

$$D_X = \{0,\ 1\}$$

et ***Fonction de masse***

$$p_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \forall x \in D_X = \{0,\ 1\} \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Propriétés

Moyenne (Espérance) :

$$\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = p$$

Variance :

$$\sigma^2(X) = p(1-p)$$

2 Loi Géometrique

On considère l' expérience aléatoire d'une suite d'épreuves indépendantes, dont chacune a la probabilité p pour être un succès, jusqu' à obtenir le premier succès.

Soit X le nombre d'epreuves nécessaires pour obtenir ce résultat. Alors, la probabilité sera :

$$P[\{X = n\}] = (1-p)^{(n-1)}p \qquad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

Autrement dit les $n-1$ épreuves sont des échecs avec probabilité $(1-p)^{n-1}$ et p c'est la probabilité de la $n-$ème épreuve.

On vérifie qu'il s'agît d'une bonne mesure de probabilité, car :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[\{X = n\}] = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{(n-1)} p = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

On définit ainsi la variable aléatoire qui suit la loi *Géometrique* de paramètre p et notée $\mathcal{G}eo(p)$ par l'application suivante :

Définition 2.1 *Loi Géometrique* $X : \mathcal{G}eo(p)$

$$X : \Omega \to \mathbb{N}^*$$

ayant comme :

Support : $D_X = \mathbb{N}^*$

Fonction de masse $p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \forall \ x \in \mathbb{N}^* \\ 0 \quad \textit{ailleurs} & \end{cases}$

Propriétés

Moyenne (Espérance) : $\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = \dfrac{1}{p}$

Variance : $\sigma^2(X) = \dfrac{(1-p)}{p^2}$

3 Loi Binômiale

On considère comme expérience aléatoire la répétition de n **expériences indépendantes de Bernoulli**.

Définition 3.1 *On associe à cette expérience une variable aléatoire discrète* X *qui suit la loi binomiale avec paramètres* $n \in \mathbb{N}, \ p \in]0,1[$ *:*

$$\Leftrightarrow X : B(n, \ p)$$

ayant comme :

Support *:* $D_X = \{0, \ \ldots, \ n\}$

Fonction de masse :

$$p_X(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} = C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & \forall x \in D_X \\ \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Remarque 3.1

Propriétés

On vérifie facilement que p_X est une fonction de masse car $p_X(x) \geq 0 \ \forall x$ et

$$\sum_{x=0}^{n} p_X(x) = (p + (1-p))^n = 1 \text{ (Newton)}$$

Espérance : $\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = np$

Variance : $\sigma^2(X) = np(1-p)$

4 Loi de Poisson

1 Définition

Définition 4.1 *X variable aléatoire discrète suit une loi de Poisson*

$$\Leftrightarrow X : P[\lambda]$$

avec paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, si elle admet comme :

***Support** :*

$$D_X = \{0,\ 1,\ \ldots\} = \mathbb{N}$$

***Fonction de masse** :*

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \forall x \in D_X \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Remarque 4.1 *On vérifie que p_X est une bonne fonction de masse car :*

$$p_X(x) \geq 0 \quad \forall x \quad \textit{et} \quad \sum_{x \in D_X} p_X(x) = 1.$$

Propriétés

Espérance : $\mathbb{E}[X] = \lambda$

Variance : $\sigma^2(X) = \lambda$

2 Application

Théorème 4.1 (loi de Poisson comme limite de la loi binomiale)

Soient $\{p_1,\ p_2,\ \ldots\ p_n\ \ldots\}$, une suite de nombres appartenant à $]0,\ 1[$ tels que $np_n = \lambda$ $(\lambda \in]0,\ +\infty[)$ $n = 1, 2, 3\ldots$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p_n^x (1 - p_n)^{n-x} = \lim_{n \to +\infty} C_n^x p_n^x q_n^{n-x}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\ \forall x \in \mathbb{N}$$

3 Complément sur la loi de Poisson

Conditions pour que X variable aléatoire avec support une partie de $\mathbb{N}$ se formalise d'après une loi de Poisson.

La variable aléatoire discrète qui donne le nombre d'apparitions d'un phénomène aléatoire dans un intervalle de temps T suit une loi de Poisson :

$$P_\lambda[x] = \frac{e^{-\theta T}(\theta T)^x}{x!} \text{ avec } \begin{cases} \lambda = \theta T \\ \theta = \dfrac{\text{nombre d'apparitions}}{\text{unité de temps}} \\ T = \text{temps, longueur, surface, volume} \end{cases}$$

si les conditions suivantes sont respectées :

C1 $\exists\, \theta > 0$ tel que la probabilité d'observer exactement une apparition du phénomène aléatoire, $P[\{x = 1\}]$, dans l'intervalle de temps $[t,\ t + h]$ est donnée par :

$$P[\{x = 1\}] = \theta h + \varphi(h)$$

avec φ tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

C2 Soient les intervalles indépendants : $I_1,\ \ldots,\ I_n,\quad I_i \cap I_j = ,$ et soient les événements :
$A_j = \{$"au moins une apparition du phénomène aléatoire dans l'intervalle I_j"$\}$
$\Rightarrow$ Tous les événements A_j sont mutuellement indépendants :

$$P[A_i \cap A_j] = P[A_i]\, P[A_j]$$

5 Loi hypergéométrique

Expérience : Tirage simultané de n boules par une boite de N boules :

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{lll} N_1 & \text{boules} & \textbf{blanches} \\ N_2 & \text{boules} & \textbf{noires} \end{array} \right.$$

On associe à cette expérience une variable aléatoire X qui désigne le nombre de boules blanches parmi les n choisies.

La plus petite valeur :

$$x_{min} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } n \leq N_2 \\ n - (N - N_1) = n - N_2 & \text{si } n > N_2 \end{array} \right.$$

La plus grande valeur :

$$x_{max} = \left\{ \begin{array}{ll} N_1 & \text{si } n \geq N_1 \\ n & \text{si } n < N_1 \end{array} \right\}$$

Il existe $\left(\begin{array}{c} N_1 \\ x \end{array} \right)$ façons de choisir x boules blanches et $\left(\begin{array}{c} N_2 \\ n - x \end{array} \right)$ façons de choisir $(n - x)$ boules noires et le modèle est uniforme

Définition 5.1
X variable aléatoire discrète suit la loi hypergéométrique avec paramètres $N,\ N_1$ et n

$$\Leftrightarrow\ X : H(N,\ N_1,\ n)$$

si elle admet comme :
Support :

$$D_X = \{\max(0,\ n - N + N_1),\ \max(0,\ n - N + N + 1) \ldots \min(n,\ N_1)\}$$

Fonction de masse :

$$p_X(x) = \frac{\left(\begin{array}{c} N_1 \\ x \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} N - N_1 \\ n - x \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)} = \frac{C_{N_1}^{x}\, C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^n} \qquad \forall x \in D_X$$

avec :

$$0 \leq N_1 \leq N; \qquad 1 \leq n \leq N.$$

Propriétés

$$\textbf{Moyenne (Espérance)} : \quad \mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = \frac{nN_1}{N_1 + N_2}$$

$$\textbf{Variance :} \quad \sigma^2(X) = \frac{nN_1N_2(N_1 + N_2 - n)}{(N_1 + N_2)^2(N_1 + N_2 - 1)}$$

Quelques lois de probabilités continues

6 Loi uniforme

1 Fonction de densité - Fonction de répartition

Définition 6.1
X variable aléatoire continue suit la loi uniforme sur $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{U}([a,\ b]),$$

si elle admet comme :
Support :

$$C_X = [a,\ b]$$

Fonction de densité :

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{cc} \dfrac{1}{b-a} & \textit{si } x \in\ C_X \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{array} \right\}$$

*** Autrement :** X décrit l'expérience aléatoire de choisir au hasard un point x, sur l'intervalle $[a,\ b]$ de façon à ce que la probabilité $P[\{x \in [a,\ b]\}]$ soit indépendante du sous-intervalle choisi pour la variation de x.

* Soit $X : \mathcal{U}([a,\ b])$, alors :

1. **La fonction de répartition** est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

2. **La fonctionnelle génératrice** :

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

3. **La fonction caractéristique** :

$$\Phi(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega a}$$

4. **Moyenne(Espérance)** : $\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = \dfrac{a+b}{2}$

5. **Variance** : $\sigma_X^2 = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

2 Loi Uniforme et Simulation

Théorème 6.1 *Soit X variable aléatoire continue avec F_X fonction de répartition, alors la variable aléatoire "transformée" $Y = F_X(x)$ suit une loi uniforme $\mathcal{U}([0,\ 1])$*

Remarque Importante : Grâce à ce théorème, en prenant l'inverse de la fonction de répartition (quand sa forme explicite existe) :

$$F_X^{-1}(u) = x,$$

on "simule" une variable aléatoire continue par la méthode Monte-Carlo.

7 Loi normale (loi de Gauss)

1 Famille de fonctions de densité "Gaussiennes"

* Soit X une variable aléatoire continue avec fonction de densité :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2/2}$$

a) Propriétés

- f non négative et symétrique par rapport à $x = 0$
- f admet un maximum à $x = 0$
- $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,399$
- $x = 1$ et $x = -1$ points d'inflexion
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

b) Famille de fonctions de densité du même type.

Soit $Y = aX + b$ où $a > 0$ alors (voir application du théorème de la transformée) :

$$\forall\ y \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\ e^{-\dfrac{(y-b)^2}{2a^2}}.$$

2 Variable aléatoire Normale, $X : \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$

Définition 7.1
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ variable aléatoire continue suit la loi normale avec moyenne $\mu(= b)$ et variance $\sigma^2(= a^2)$

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2),$$

si elle admet comme

Support :

$$C_X = \mathbb{R}$$

Fonction de densité :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Si

$$\mu = 0, \qquad \sigma^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad X = \textit{var.al. normale centrée réduite} \qquad \Leftrightarrow \qquad X : \mathcal{N}(0,\ 1)$$

(ou *variable standardisée)*

Remarque 7.1

1. La famille des fonctions du type "gaussienne"

$$\tilde{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

ne possédant pas de primitive sous forme d'une fonction élémentaire, on utilise des tables où on peut trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire centrée réduite

$$X : \mathcal{N}(0,\ 1)$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

2. Usage fréquent de symétries :

$$\mathcal{F}(0) = 0,5$$

$$\mathcal{F}(-x) = 1 - \mathcal{F}(x)$$

Théorème 7.1

Soit $X : \mathcal{N}(\mu,\ \sigma^2)$ alors :

1. *La **fonction Génératrice** ,*

$$\forall \quad t \in \mathbb{R}, \qquad M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2},$$

2. *La **Moyenne (Espérance)***

$$\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = \mu$$

3. *La **Variance :***

$$\sigma_X^2 = \sigma^2$$

4. *La variable aléatoire transformée "centrée réduite" suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$*
5. *La **fonction caractéristique**,*

$$\forall \quad \omega \in \mathbb{R}, \qquad \Phi(\omega) = e^{i\omega\mu - \omega^2 \frac{\sigma^2}{2}}$$

Exemple 7.1

1. $X : \mathcal{N}(9, 25)$
$P[X \leq 10] = F_X(x = 10) = P\left[\frac{X-9}{5} \leq \frac{1}{5}\right] = P\left[Y \leq \frac{1}{5}\right] = \mathcal{F}\left(\frac{1}{5}\right) = 0,579$
2. On suppose que dans une certaine université, le QI , des étudiants est représenté par une variable aléatoire X qui suit une loi $\mathcal{N}(125,\ 49)$. Le QI moyen de l'université est $\mu_X = 125$
$P[\{X \geq 120\}] = P\left[\left\{\frac{X-125}{7} > -\frac{5}{7}\right\}\right] = 1 - \mathcal{F}\left(-\frac{5}{7}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{5}{7}\right) = 0,761$
$\Rightarrow \approx 76\%$ des étudiants de cette université ont un QI d'au moins 120.

3 Tables

Variable aléatoire centrée réduite

$$\mathcal{F}(x) = P\{N(0,\ 1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

4 Table B_1

[1] Table B_1 donne la valeur de x dont la valeur correspondante de $\mathcal{F}(x)$ est la somme de la colonne et ligne correspondante .

Percentile de la var.normale centrée réduite.

F	.000	.010	.020	.030	.040	.050	.060	.070	.080	.090
.5	.000	.025	.050	.075	.100	.126	.151	.176	.202	.228
.6	.253	.279	.305	.332	.358	.385	.412	.440	.468	.496
.7	.524	.553	.583	.613	.643	.674	.706	.739	.772	.806
.8	.842	.878	.915	.954	.994	1.036	1.080	1.126	1.175	1.227
.9	1.282	1.341	1.405	1.476	1.555	1.645	1.751	1.881	2.054	2.326

x	1.960	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417	4.892
F	.975	.995	.999	.9995	.99995	.999995	.9999995
2(1-F)	.050	.010	.002	.001	.0001	.00001	.000001

5 Table B_2

[2] Table B_2 donne $\mathcal{F}(x)$, où x est donné par la somme de la colonne et de la ligne correspondante.

Exemple 7.2

Pour la valeur 0.36 on a $\mathcal{F}(0.36) = 0.6406$ (par la ligne .3 et la colonne .06 de la table B_2

1. Source R.A. Fisher and F.Yates. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Table 1 ; publié par Longman Group Ltd., London (précédemment publié par Olivier and Boyd, Edinburgh) ; avec la permission des auteurs et éditeurs.
2. Source : A. Hald, *Statistical Tables and Formulas* (1952), Table II : reimprimé avec la permission de John Wiley

Fonction de répartition de la var.aléatoire normale centrée réduite.

x	.000000	.010000	.020000	.030000	.040000	.050000	.060000	.070000	.080000	.090000
.0	.500000	.504000	.508000	.512000	.516000	.519900	.523900	.527900	.531900	.535900
.1	.539800	.543800	.547800	.551700	.555700	.559600	.563600	.567500	.571400	.575300
.2	.579300	.583200	.587100	.591000	.594800	.598700	.602600	.606400	.610300	.614100
.3	.617900	.621700	.625500	.629300	.633100	.636800	.640600	.644300	.648000	.651700
.4	.655400	.659100	.662800	.666400	.670000	.673600	.677200	.680800	.684400	.687900
.5	.691500	.695000	.698500	.701900	.705400	.708800	.712300	.715700	.719000	.722400
.6	.725700	.729100	.732400	.735700	.738900	.742200	.745400	.748600	.751700	.754900
.7	.758000	.761100	.764200	.767300	.770300	.773400	.776400	.779400	.782300	.785200
.8	.788100	.791000	.793900	.796700	.799500	.802300	.805100	.807800	.810600	.813300
.9	.815900	.818600	.821200	.823800	.826400	.828900	.831500	.834000	.836500	.838900
1.0	.841300	.843800	.846100	.848500	.850800	.853100	.855400	.857700	.859900	.866100
1.1	.864300	.866500	.868600	.870800	.872900	.874900	.877000	.879000	.881000	.883000
1.2	.884900	.886900	.888800	.890700	.892500	.894400	.896200	.898000	.899700	.901470
1.3	.903200	.904900	.906580	.908240	.909880	.911490	.913090	.914660	.916210	.917740
1.4	.919240	.920730	.922200	.923640	.925070	.926470	.927850	.929220	.930560	.931890
1.5	.933190	.934480	.935740	.936690	.938220	.939430	.940620	.941790	.942950	.944080
1.6	.945200	.946300	.947380	.948450	.949500	.950530	.951540	.952540	.953520	.954490
1.7	.955430	.956370	.957280	.958180	.959070	.959940	.960800	.961640	.962460	.963270
1.8	.964070	.964850	.965620	.966380	.967120	.967840	.968560	.969260	.969950	.970620
1.9	.971280	.971930	.972570	.973200	.973810	.974410	.975000	.975580	.976150	.976700
2.0	.977250	.977780	.978310	.978820	.979320	.979820	.980300	.980770	.981240	.981690
2.1	.982140	.982570	.983000	.983410	.983820	.984220	.984610	.985000	.985370	.985740
2.2	.986100	.986450	.986790	.987130	.987450	.987780	.988090	.988400	.988700	.988990
2.3	.989280	.989560	.989830	.990097	.990358	.990613	.990863	.991106	.991344	.991576
2.4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2.5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2.6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2.7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2.8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998012	.998074
2.9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999

8 Loi Lognormale

Définition 8.1 *Une variable aléatoire Y suit une loi lognormale avec paramètres μ_X et σ_X^2 si la variable aléatoire $X = \ln Y$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu_X,\ \sigma_X^2)$ et ayant comme :*

a) ***Support*** $C_Y =]0,\ +\infty[$

b) Fonction de densité

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_X y\sqrt{2\pi}} \; e^{-\left(\dfrac{\ln y - \mu_X}{2\sigma_X}\right)^2} & \textit{si } y \in C_Y \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Propriétés

La **Moyenne (Espérance)**

$$\mathbb{E}[Y] \equiv \mu_Y = e^{\mu_X + \dfrac{\sigma^2}{2}}$$

La **Variance** :

$$\sigma^2 = e^{2\mu_X + \sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

9 Loi exponentielle

Définition 9.1

Une variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle (ou est dite exponentielle) avec paramètres θ et ν

$$\Leftrightarrow X:\ Exp[\theta,\ \nu]$$

*si elle admet comme **support***

$$C_X =]\nu,\ +\infty[$$

*et comme **fonction de densité :***

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta(x-\nu)} & \forall x \in C_X \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

avec $\theta \in]0,\ +\infty[$ et $\nu \in]-\infty,\ +\infty[$

Remarque 9.1 Pour $\nu = 0$, X est une variable aléatoire donnant le temps d'attente pour la première apparition du phénomène aléatoire quand Y représente la variable aléatoire du nombre d'apparitions suivant une loi de Poisson avec paramètre $\theta T = \lambda$.
X est aussi la variable aléatoire pour le temps entre deux apparitions du phénomène aléatoire.

*** Fonctionnelle génératrice**

$$\begin{aligned} M_X(t) \equiv E[e^{tX}] &= \int_\nu^{+\infty} e^{tx}\theta e^{-\theta(x-\nu)}dx (\text{on pose } z = x - \nu \\ &= \int_0^{+\infty} \theta e^{t(z+\nu)}e^{-\theta z}dz = \frac{\theta e^{t\nu}}{\theta - t}\ (\text{avec } t < \theta) \end{aligned}$$

$$M_X(t) = \frac{\theta e^{t\nu}}{\theta - t}\ (\text{avec } t < \theta)$$

*** Fonction caractéristique**

$$\Phi(\omega) = \frac{\theta e^{i\omega\nu}}{\theta - j\omega}$$

*** Moyenne (Espérance)**

$$\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = \nu + \frac{1}{\theta}$$

*** Variance**

$$\sigma_X^2 \equiv E[X^2] - \mu_X^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

Exemple 9.1

* Soit T le temps de fonctionnement d'un système (ou appareil) avant la première panne

$$\Rightarrow$$

Loi exponentielle avec $\nu = 0$ et $\theta > 0$
Probabilité $P[\{T > t_0\}] = e^{-\theta t_0} = \varphi(t_0) = 1 - F_T(t_0)$

$\Leftrightarrow$ *Fiabilité du système*

Système idéal : $\varphi(t_0) = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$ impossible
En pratique, on fixe φ et on détermine θ (pour un certain t) nécessaire pour atteindre ce but.

* Durée de service d'une ampoule. On pose $\nu = 0, \quad \theta = \dfrac{1}{600}$
La durée moyenne : $600h$
La fiabilité de cette ampoule à $t = 500h$ est $e^{-\frac{5}{6}}$

$$\Leftrightarrow$$

l'ampoule dure au moins $500h$ avec la probabilité $e^{-\frac{5}{6}}$

Remarque 9.2 Pour $\nu = 0$

$$F_X(x) = \int_0^x \theta e^{-\theta t} dt = \left[-e^{-\theta t}\right]_0^x = 1 - e^{-\theta x}$$

10 Loi "gamma"

1 Rappel : Fonction gamma

Définition 10.1

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy \; a > 0$$

On peut vérifier que l'intégrale converge $\forall a > 0$

Propriétés

* $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)\ a > 0$
* $\Gamma(a+1) = a!\ \forall a \in \mathbb{N}\ (\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-y}dy = 1)$
* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Si on pose : $y = \frac{x}{\beta}\ \beta > 0 \Rightarrow \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^a}dx$

2 Loi Gamma $\Leftrightarrow X : \mathcal{G}(\alpha,\ \beta)$

Définition 10.2 X variable aléatoire continue suit une loi "gamma" avec paramètres α et β

$$\Leftrightarrow X : \mathcal{G}(\alpha,\ \beta)$$

si elle admet comme :

i) ***Support :***

$$C_X =]0,\ +\infty[$$

ii) ***Fonction de densité :***

$$f_X(x) = \left\{ \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} \quad \forall x \in C_X \right.$$

Propriétés de la loi $\mathcal{G}(\alpha,\ \beta)$

i)

Si $\alpha = 1 \Rightarrow$ *loi exponentielle avec* $\theta = \frac{1}{\beta}$ *et* $\nu = 0$

ii) Fonction de répartition de $X : \mathcal{G}(\alpha,\ \beta)$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^x y^{\alpha-1}e^{-\frac{y}{\beta}}dy & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Existence de tables pour : $\frac{1}{\Gamma(u+p)}\int_0^{u\sqrt{1+p}} y^p e^{-y}dy$

ii) Fonctionnelle génératrice

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

iii) Fonction caractéristique

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{(1-i\omega\beta)^\alpha}$$

iv) Moyenne (Espérance) : $\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = \alpha\beta$

v) Variance : $\sigma_X^2 = \alpha\beta^2$

Exemple 10.1
Si T est la variable aléatoire donnant le temps de fonctionnement d'un système avant la première panne $\Rightarrow$ loi exponentielle
On peut supposer qu'un fusible ne s'use pas alors :

$$P[\{T > t_1 + t_2\}|[T > t_1\}] = P[\{T > t_2\}]\ (t_1,\ t_2) > 0$$

mais il existe des situations où un appareil (même dans les bonnes conditions) subit une usure.
Exemple de l'automobile : les lois exponentielle et normale ne sont plus valables. La loi de gamma est souvent le modèle le plus valable.

11 Loi du "khi 2"

Définition 11.1
X variable aléatoire continue suit une loi $\mathcal{G}\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, loi gamma particulière $r \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow X : \chi^2_r$$

avec r degrés de liberté *avec :*

*** Fonction de densité**

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\dfrac{r}{2}\right)} x^{\frac{x}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

*** Espérance**

$$\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = r$$

*** Variance**

$$\sigma^2_X = 2r$$

Théorème 11.1
Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,\ 1)$
$\Rightarrow Y = X^2$ suit une loi du "khi 2"

12 Loi de Weibull

Définition 12.1
X variable aléatoire continue suit une loi de Weibull avec paramètres $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.
$\Leftrightarrow X : \mathcal{W}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ si $Y = \left(\dfrac{X-\gamma}{\alpha}\right)^\beta$ suit une loi exponentielle $Exp[1,\ 0]$
$\alpha \in]0,\ +\infty[,\ \beta \in]0,\ +\infty[,\ \gamma \in]-\infty,\ +\infty[$

*** Fonction de densité**

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^\beta\right]$$

*** Support**

$$C_X = \mathbb{R}$$

Remarque 12.1
Si $\beta = 1 \Rightarrow$ loi exponentielle avec paramètre $\theta = \dfrac{1}{\alpha}$ et $\nu = \gamma$

*** Fonction de répartition pour** $X : \mathcal{W}(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - exp\left[-\left(\dfrac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta}\right] & \text{si } x > \gamma \\ 0 & \text{si } x \leq \gamma \end{cases}$$

* On peut trouver des tables pour cette fonction quand $\alpha = 1$ et $\gamma = 0$

* **Exemple 12.1** Weibull : modèle pour représenter la tension à laquelle un matériau se brise.

*** Espérance**

$$\mathbb{E}[X] \equiv \mu_X = \gamma + \alpha\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)$$

*** Variance**

$$\sigma_X^2 = \alpha^2\left[\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^2\right]$$