

E.I.S.T.I. – Département Mathématiques
1^{ère} Année Ingénieurs
PROBABILITES T.D. 3
Variables aléatoires
Espérance - Variance

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

Exercice 1

Un joueur lance deux dés équilibrés. Il gagne 10€ si la somme des faces est égale à 7 ou 11, il perd 10€ si la somme est égale à 2 ou 12 et ne perd rien ou ne gagne rien sinon. Soit G la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

- Déterminer l'espace image de la variable aléatoire G.
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
- Calculer et tracer la fonction de répartition F_G de la variable aléatoire G.
- Calculer l'espérance mathématique du gain.
- Supposons que lorsqu'il perd le joueur perd k € et non plus 10€. Déterminer k pour que le jeu soit honnête, *i.e* pour que l'espérance soit nulle.

Exercice 2

On tire simultanément et au hasard trois boules dans une urne contenant 4 boules rouges et 6 boules noires. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges.

- Déterminer l'espace image de la variable aléatoire X.
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
- Calculer et tracer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

Exercice 3

Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre d'appels téléphoniques reçus à une centrale d'achat entre 12h et 14h.

- Donner la support D_X de cette variable aléatoire.
- On considère que la fonction de masse de X est donnée par

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{si } x \in D_X \text{ où } \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

- On estime que chaque appel téléphonique rapporte 100€. On note Y le gain apporté par les appels téléphoniques entre 12h et 14h. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers dont les distributions de probabilité sont données par

X				
x_i	0	1	2	3
p_i	0.1	0.2	0.3	0.4

Y			
y_i	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

- Calculer l'espérance et la variance de chacune des deux variables.
- Soient maintenant les variables aléatoires $S=X+Y$ et $P=XY$. Déterminer les distributions de probabilité de ces deux variables et calculer leur espérance et leur variance.

VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire continue représentant la durée de vie d'une pièce d'équipement de fonction de densité,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0,001e^{-0,001x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Quel est le support de X ? Vérifier que la fonction de densité définit bien une mesure de probabilité.
- Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- Calculer la probabilité pour que la pièce d'équipement dure
 - plus de 1000 heures
 - exactement 1000 heures
 - entre 800 et 1200 heures
- Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 6

L'imprimante de l'EISTI réservée aux étudiants est défectueuse. D'après des tests, on peut modéliser le temps de fonctionnement sans panne (en mois) par une variable aléatoire continue X de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta^2 x e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ où } \theta > 0$$

- Quel est le support de X ? Vérifier que la fonction de densité définit bien une mesure de probabilité.
- Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- Calculer la probabilité pour que l'imprimante puisse fonctionner plus de 22 mois sachant qu'elle fonctionne depuis déjà 8 mois sans panne et que $\theta=0,5$.
- Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 7

La durée en minutes d'une conversation téléphonique dans une cabine publique est une variable aléatoire continue X de support \mathbb{R}_+ et de fonction de densité définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0,1 e^{-0,1(x-c)} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}, \text{ où } c \text{ est une constante réelle.}$$

- Déterminer la constante c pour que f soit effectivement une fonction de densité.
- Déterminer la durée moyenne d'une conversation téléphonique (espérance de X)
- Si vous arrivez à cette cabine et quelqu'un passe juste devant vous, quelle est la probabilité que vous attendiez plus de 10 minutes

Exercice 8

La vitesse d'une molécule au sein d'un gaz homogène en état d'équilibre est une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax e^{-bx^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

où $b=m/2kT$ et k , T , m sont respectivement la constante de Boltzmann, la température absolue et la masse de la molécule.

- 1) Evaluer a en fonction de b .
- 2) Déterminer b sachant que la probabilité pour que la vitesse dépasse 100 est de 0,1.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité f_X symétrique par rapport à un point $c \in \mathbb{R}$, i.e

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+c)=f(c-x).$$

- 1) Grâce à la linéarité de l'espérance, exprimer $E[X]$ en fonction de $E[c+X]$ et $E[c-X]$.
- 2) A l'aide de la définition de l'espérance, montrer que $E[c+X]=E[c-X]+2c$.
- 3) En déduire que $E[X]=c$.