

19 / 05 / 08

TMQL51U – Intro à la modélisation stat.

Durée: 2 heures

Aucun document autorisé - calculatrice autorisée

Colle ici	
NOM (majuscules): _____	Colle ici
Prénom: _____	

NOTES:

Exercice: ___ / 6

Problème: ____ / 14

TOTAL: _____

N'oubliez pas d'indiquer votre nom. Colle disponible quand vous rendez la copie. Donnez vos réponses à la suite de chaque question, aux endroits prévus. Barème approximatif entre parenthèses. Résultats avec 3 chiffres significatifs. Tableau pour loi normale donnée en dernière page.

On rappelle que pour un échantillon X_1, X_2, \dots, X_n d'une variable aléatoire X , la variance de X

$$\frac{\sum_k (X_k)^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} \cdot (\mu_e)^2$$

est estimée par la quantité

où μ_e est la moyenne empirique des X_k .

Exercice

La note X à un examen est une variable aléatoire dont un échantillon est donné ci-dessous (une note entre 0 et 5, etc).

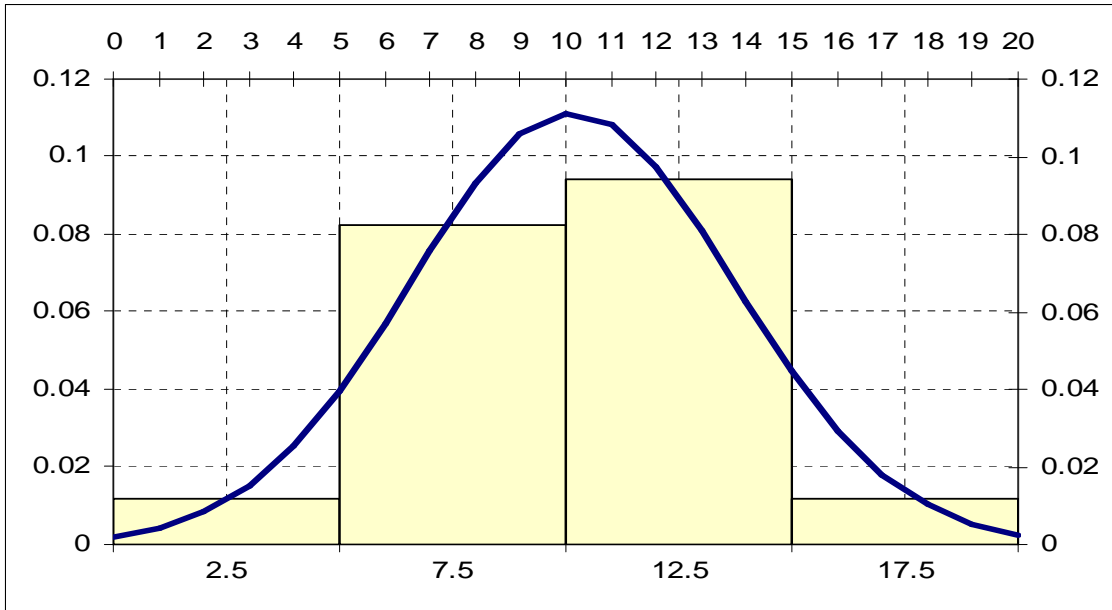
0-5	5-10	10-15	15-20
1	7	8	1

1. (2 pts) Donnez les valeurs estimées de l'espérance et de l'écart-type de X .

On considère comme dans les TD que les notes dans un intervalle sont égales à la valeur au milieu de l'intervalle (7 notes égales à 7.5, etc).

Espérance: 10.147 Ecart-type: 3.587

2. (1 pt) Tracez l'histogramme qui décrit ces données.



3. Deux cents candidats se présentent à un examen Air France de pilote de ligne pour lequel il n'y a que 10 places. On s'attend à ce que la distribution des notes soit la même qu'en 1. On veut savoir quelle est la note X_c qui sera dépassée par seulement 10 des 200 candidats.

Deux étapes:

i. (1 pt) Donnez la loi continue (et ses paramètres) qui approxime la loi de X et tracez-la ci-dessus.

Loi: Normale de paramètres $\mu=10.147$ et $\sigma=3.587$.

ii. (2 pts) Utilisez l'approximation de i) pour trouver la valeur critique X_c .

On veut que $10/200 = 5\%$ des notes dépassent X_c - Pour la loi normale centrée-réduite, 5% des observations dépassent 1.645, donc X_c est solution de $(X_c - 10.147)/3.587 = 1.645 \Rightarrow X_c=16.05$.

$X_c = 16.05$

Problème

A chaque seconde il y a une probabilité p qu'un standard téléphonique reçoive un appel.

1. On appelle S la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus en une heure.

i. (1 pt) Donner sans détails la loi de S (nom et expression exacte), son espérance, et sa variance, en fonction de p .

Loi de S : binomiale de paramètre p et $n=3600$; $P(S=k)=C(3600,k)p^k(1-p)^{3600-k}$

Espérance : $np=3600p$ Variance: $npq= 3600p(1-p)$

ii. (2 pts) Avec $p=0.01$ utilisez la méthode que vous voulez pour calculer la probabilité au moins approximative que S soit plus grand ou égal à 30.

Comme dans les TD la proba recherchée est celle qu'une v.a. normale de paramètres

$\mu=np=36$ et $\sigma=(npq)^{0.5}=5.97$ soit plus grande que 29.5. On calcule donc

$z=(29.5-36)/5.97 = -1.09$; la proba qu'une v.a. normale centrée-réduite soit > -1.09 est 0.862.

Réponse: 0.862

2. On appelle U la variable aléatoire discrète égale à la seconde à laquelle le premier appel arrive.

i. (1 pt) Donner sans détails la loi de U (nom et expression exacte), son espérance, et sa variance, en fonction de p .

Loi de U . géométrique: $P(U=k)=(1-p)^{k-1}p$

Espérance : $1/p$ Variance: $(1-p)/p^2$

ii. (1 pt) Exprimer en fonction de p et k la probabilité $P(U \geq k+1)$.

C'est la probabilité qu'aucun appel n'arrive durant k secondes:

$P(U \geq k+1) = (1-p)^k$

iii. (1 pt) Donner l'expression pour la valeur du terme λ tel que la probabilité $P(U \geq k+1)$ puisse s'écrire $\exp(-\lambda k)$.

$(1-p)^k = \exp(-\lambda k)$, donc

$\lambda = -\ln(1-p)$

iv. (1 pt) Exprimer λ quand $p=0.01$: **$\lambda=0.01$**

quand $p=0.1$: **$\lambda=0.105$**

quand $p=0.5$: **$\lambda=0.693$**

3. On considère que U , exprimée en secondes, est une variable aléatoire continue qu'on appelle X . La probabilité que X soit plus grande que x s'écrit maintenant $\exp(-\lambda x)$.

i. (1 pt) Comment s'appelle cette variable aléatoire X , et quelle est sa fonction de répartition?

Réponse: Loi exponentielle de paramètre λ ; fonction de répartition: $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$.

ii. (2 pts) Avec $p=0.01$ utilisez X et les nombres aléatoires 0.23, 0.12, 0.56 uniformément distribués sur $(0,1)$ pour simuler trois fois l'événement: "Au moins un appel arrive en 30 secondes".

Proba de cet événement = 1 - proba d'aucun événement en 30 secondes: $1 - \exp(-0.01 \cdot 30) = 0.26$

On dit que l'événement se produit si $r < 0.26$:

1ère simulation: $r=0.23$: l'événement se produit

2ème simulation: $r=0.12$: l'événement se produit

3ème simulation: $r=0.56$: l'événement ne se produit pas

(On pouvait aussi simuler (loi exponentielle) la durée jusqu'au premier événement: $-\ln(r)/\lambda$).

4. On appelle N la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus en 30 secondes.

i. (2 pts). Donner en fonction de λ la probabilité qu'il y ait exactement k appels en 30 secondes.

N suit une loi de Poisson: $P(N=k) = \exp(-30\lambda)(30\lambda)^k/k!$

Réponse: $P(N=k) = \exp(-30\lambda)(30\lambda)^k/k!$

ii. (1 pt) Avec $p=0.01$, calculez les probabilités
D'après 2iv on a $\lambda=0.01$ et donc:

$$P(N=0) = \exp(-30 \times 0.01)(-30 \times 0.01)^0/0! = 0.741$$

$$P(N=1) = \exp(-30 \times 0.01)(-30 \times 0.01)^1/1! = 0.222$$

$$P(N \geq 2) = 1 - P(N=0) - P(N=1) = 0.037$$

iii. (1 pt) Toujours avec $p=0.01$, utilisez les nombres aléatoires 0.43, 0.02, 0.96, 0.54 pour simuler quatre fois les trois événements possibles de ii. Expliquez la méthode.

Si nombre aléatoire r tombe entre 0 et 0.741 (proba=0.741) on dit que le premier événement s'est produit.

Si nombre aléatoire r tombe entre 0.741 et $0.741+0.222=0.963$ (proba=0.222) on dit que le deuxième événement s'est produit.

Si nombre aléatoire r tombe entre 0.963 et 1 (proba = 0.037) on dit que le troisième événement s'est produit.

Nombre de fois que $N=0$: **3**

Nombre de fois que $N=1$: **1**

Nombre de fois que $N \geq 2$: **0**

Tableau donnant la fonction de répartition $\Phi(x)$ pour la loi normale centrée-réduite.

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999