EISTI

Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

CPI2 2007/08 – 04/04/2008
Aucun document autorisé - calculatrice UPPA autorisée
Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et feuille de papier millimétré fournies
Durée : 2 heures

Devoir Surveillé 2 en Probabilités

Exercice 1 :
Un joueur de tennis effectue une mise en jeu. Pour cela il a droit à deux tentatives : un premier service, suivi, s'il n'a pas réussi, d'un deuxième service. La probabilité pour que le premier service réussisse est $\frac{2}{3}$. S'il a échoué, la probabilité pour que le deuxième service réussisse est $\frac{4}{5}$. Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y a "double faute", sinon la mise en jeu est réussie.

1) a) Déterminer la probabilité pour que, sur une mise en jeu, ce joueur fasse une "double faute".

b) Déterminer la probabilité pour que la mise en jeu soit réussie.

2) Ce joueur effectue dix mises en jeu successives, dont les résultats sont indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de mises en jeu réussies.

a) Quelle est la loi de X ? (Justifiez votre réponse.)

b) Déterminer la probabilité pour que ce joueur réussisse au moins neuf mises en jeu.

c) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 2 :
La variable aléatoire X égale au poids d'une carotte du potager de Lucien suit une loi normale. Sur une récolte de 400 carottes, 250 font moins de 20 grammes et 380 font plus de 12 grammes.

1) Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

2) Evaluer le pourcentage de carottes pesant plus de 18 grammes.

3) On arrache une carotte au hasard. Sachant qu'elle pèse plus de 15 grammes, calculer la probabilité pour qu'elle pèse moins de 18 grammes.

Exercice 3 :
Le camping des Flots Bleus comporte 120 emplacements de tentes. En serrant au maximum, le gérant arrive à placer 150 tentes. Les emplacements sont retenus à l'avance par les vacanciers. La probabilité pour qu'un emplacement retenu soit occupé est de 0.85.

1) Déterminer le nombre maximum de réservations que le gérant peut accepter pour qu'il puisse loger tout le monde avec une probabilité supérieure à 0.95.

2) Sachant qu'il a retenu 155 réservations, calculer la probabilité pour que le seuil de confort de 120 tentes ne soit pas dépassé.

Exercice 4 :
Soit k un réel positif ou nul. Le temps de cuisson T, en quarts d'heure, d'un morceau de boeuf est une variable aléatoire définie à partir d'une autre variable aléatoire X dont la fonction densité de probabilité f vérifie :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } \mid x \mid \leq k \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la valeur de k.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

3) La variable aléatoire T est liée à la variable aléatoire X par : $T = 1 + X^2$.

   a) Déterminer la fonction de densité de probabilité g de T.

   b) Calculer l'espérance et l'écart-type de T.

Exercice 5 :
Les durées de trajet, en minutes, mises par les élèves d'une classe de CPI2, pour venir chaque début de semaine à l'E.I.S.T.I., peuvent être considérées comme une variable aléatoire X_D. On ne vous donne pas toutes les durées, individuellement, seulement un vecteur V de dimension 8 contenant les nombres d'élèves dont la durée de trajet est dans chacun des intervalles : $(10-20)$
$(20-30)$, $(30-40)$, $(40-50)$, $(50-60)$, $(60-70)$, $(70-80)$:
$V^T = (2 \;\; 5 \;\; 15 \;\; 7 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1)$ (par exemple, il y a 15 élèves dont la durée de trajet est comprise entre 30 et 40 minutes.)

1) Faites un histogramme (d'aire totale 1), sur la feuille de papier millimétré, pour décrire les données.

2) Le but est d'estimer les paramètres μ et σ de la loi normale qui approxime cette distribution. Avec les seules données agrégées, approximez du mieux que vous pouvez la somme $SD = \sum X_D$ des durées, ainsi que la somme des carrés $S2D = \sum \left(X_D\right)^2$. *(On supposera que toutes les durées dans un intervalle donné sont égales à la durée du milieu de l'intervalle.)*

3) Rappelez les formules pour les estimateurs μ_e et σ_e de μ et σ et utilisez-les avec les valeurs exactes des sommes que l'on vous donne maintenant : $SD = 1324$ et $S2D = 55966$.

4) Tracez sur l'histogramme de la question 1) la densité normale correspondant aux μ_e et σ_e qui viennent d'être trouvés.

5) On considère maintenant que la variable aléatoire X_D est normalement distribuée avec une espérance μ et un écart-type σ donnés par les valeurs estimées μ_e et σ_e. Trouvez la probabilité qu'un élève ait une durée de trajet comprise entre 30 et 75 minutes.