EISTI

Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

CPI2 2007/08 – 14/03/2008
Sans document - calculatrice UPPA autorisée
Durée : 2 heures

Devoir Surveillé 1 en Probabilités

Exercice 1 :
Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $0 < p < k < n$.

1) Montrer que $C_n^k C_k^p = C_n^p C_{n-p}^{n-k}$.

2) En déduire

a) $S_1 = \sum_{p=0}^{k} C_n^p C_{n-p}^{n-k}$

b) $S_2 = \sum_{k=p}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k C_k^p$.

Exercice 2 :
Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non-vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze vaccinés.

1) Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?

2) On dit que le vaccin est efficace lorsque la probabilité pour un individu d'être malade alors qu'il a été vacciné est inférieure à la probabilité d'un individu d'être malade alors qu'il n'a pas été vacciné.
Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 3 :
On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

1) On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes.
De combien de façons peut-on les ranger ?

2) On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes, et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.

a) De combien de façons peut-on les ranger ?

b) De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient regroupées par couleur ?

c) De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que seules les billes rouges soient groupées ?

Exercice 4 :
On dispose de deux urnes U et V, la première comporte a boules blanches et b boules noires, la seconde b boules blanches et a boules noires. Tous les tirages s'effectuent avec remise.
On désigne par :
U_n l'événement : "le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U" ;
V_n l'événement : "le n-ième tirage s'effectue dans l'urne V" ;
B_n l'événement : "la n-ième boule est blanche" ;
Ainsi, $P_{U_n}\big(B_n\big) = \dfrac{a}{a+b}$ et $P_{V_n}\big(B_n\big) = \dfrac{b}{a+b}$.
On note $p_n = P\big(B_n\big)$.

1) Première méthode
On suppose que le premier tirage a lieu dans l'urne U.
Si à l'étape n, on a tiré une boule blanche, le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans l'urne U, sinon il s'effectue dans V.

a) Calculer $P_{B_n}\big(B_{n+1}\big)$ et $P_{\overline{B_n}}\big(B_{n+1}\big)$.

b) Exprimer p_{n+1} en fonction de a, b et p_n.

c) Montrer que la suite $\big(w_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n = p_n - \frac{1}{2}$ est géométrique.

d) Exprimer p_n en fonction de n et en déduire la limite l de la suite $\big(p_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Deuxième méthode **On change d'expérience.**
Désormais, si à l'étape n, on a tiré une boule blanche, le $(n+1)$-ième tirage s'effectue dans la même urne, sinon on change d'urne.

a) Exprimer $P\big(U_{n+1}\big)$ en fonction de a et de b.

b) En déduire $P\big(U_n\big)$ en fonction de a et de b.

c) Exprimer p_n en fonction de a et de b.

3) Comparaison des méthodes

a) Comparer la valeur de l trouvée à la question 1) d) avec la valeur de p_n trouvée à la question 2) c).

b) Quelle est la meilleure méthode si l'objectif est tirer les boules blanches ?

Exercice 5 :
Soient a et b deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b}e^{-bx} \text{ si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{ab}{a+b}e^{ax} \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) Vérifier que f peut être la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2) Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \mid X \mid$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

b) Déterminer la fonction de densité de probabilité de Y.

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.