CHAPITRE I : LES PROBABILITES

I Introduction

Historiquement, la notion de probabilités s'est dégagée à partir d'exemples simples généralement empruntés aux jeux de hasard : on lance une pièce de monnaie ; cela constitue **une épreuve** c'est-à-dire une expérience dont le résultat est incertain. Il y a deux éventualités possibles : « pile » ou « face ». Si la pièce est symétrique et réellement lancée au hasard, on peut penser que ces deux éventualités sont également probables. On considère l'éventualité : « obtenir face ». Parmi les deux résultats également probables, il n'y en a qu'un, « l'obtention de face », qui est favorable. La probabilité « d'avoir face » est donc égale à $\frac{1}{2}$.

D'une façon générale, s'il existe en tout n éventualités s'excluant mutuellement et toutes également probables résultant d'une épreuve (par exemple : choix d'une carte parmi 52) et si parmi celles-ci, il y en a k favorables à un événement A déterminé (par exemple : choix d'un trèfle), la probabilité de cet événement est égale à :

$$\mathbf{p(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{nombre d'éventualités équiprobables favorables}}{\text{nombre d'éventualités équiprobables possibles}}}$$

Exemple :
On choisit une carte dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir un trèfle ?

1) **Impossibilité - Certitude**

Une tombola est émise. Elle comporte 1 000 billets. Parmi ceux-ci, un seul est gagnant. La probabilité pour une personne n'ayant pas acheté de billet, de gagner le lot est d'après la formule précédente égale à $\frac{0}{1000} = 0$. Autrement dit, la probabilité **d'un événement impossible** est donc **nulle**. C'est la probabilité attachée à la partie vide :

$$\boxed{p(\varnothing) = 0}$$

Supposons qu'une personne ait acheté tous les billets. Sa probabilité de gagner le lot est $\frac{1000}{1000} = 1$. **Un événement certain** a donc une probabilité égale à **1**. C'est la probabilité attachée à l'ensemble E de tous les événements

$$\boxed{p(E) = 1}$$

Entre ces deux extrêmes, il y a toute la gamme d'événements qui sont simplement possibles. Une probabilité p est donc toujours comprise entre 0 et 1.

$$\boxed{0 \leq p \leq 1}$$

Remarque : La somme des probabilités de tous les événements possibles mutuellement incompatibles est égale à 1.

Exemple :

On dispose d'un sac composé de 10 jetons blancs, 20 noirs et 30 rouges.
On note B l'événement : « avoir un jeton blanc » ;
N l'événement : « avoir un jeton noir » ;
R l'événement : « avoir un jeton rouge ».
Calculer p(B), p(N) et p(R). Vérifier que la somme de ces probabilités vaut 1.

2) Evénement complémentaire

Définition : L'événement complémentaire (ou contraire) d'un événement donné A est constitué par toutes les éventualités possibles et incompatibles qui **ne font pas partie** de A. On le note $\overline{\mathbf{A}}$. C'est le complémentaire de A par rapport à l'ensemble E des événements.

Exemple :
On reprend l'exemple précédent du sac contenant 10 jetons blancs, 20 noirs et 30 rouges. Calculer la probabilité « avoir un jeton noir ou rouge ». Définir l'événement contraire et calculer sa probabilité.

Remarques : 1) Si A est un événement donné, alors

$$\boxed{\mathbf{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}}$$

2) Dans certains cas, la probabilité de l'événement contraire est plus facile à calculer d'où l'intérêt de cette formule.

II Analyse combinatoire

L'analyse combinatoire a pour but le dénombrement des différentes dispositions que l'on peut former à partir d'un ensemble d'éléments. Dans ce qui suit, on désignera les éléments par des lettres.

1) Dispositions ordonnées et dispositions non ordonnées

Définition : Deux dispositions ordonnées contenant les mêmes éléments sont considérées comme différentes si ceux-ci n'occupent pas les mêmes places.

Exemple :
Les dispositions (a ; b) et (b ; a) sont différentes s'il s'agit de dispositions ordonnées.

Définition : Au contraire, deux dispositions non ordonnées sont considérées comme identiques pourvu qu'elles soient formées des mêmes éléments.

<u>Exemple</u> :
Les dispositions (a ; b) et (b ; a) sont identiques s'il s'agit de dispositions non ordonnées.

On va étudier trois types de dispositions : les permutations, les arrangements et les combinaisons.

2) <u>Les permutations</u>

<u>Exemple</u> :
Soient les trois éléments a, b et c. On peut faire les six permutations suivantes :

abc, acb, bac, bca, cab, cba

La permutation est une disposition ordonnée puisque chaque permutation contenant tous les éléments ne peut différer que par la place qu'ils occupent.

<u>Définition</u> : <u>Une permutation</u> de n éléments est une disposition ordonnée de l'ensemble de ces n éléments, chacun y figurant une fois et une seule. Le nombre de permutations que l'on peut effectuer avec ces n éléments est noté **n !** et est défini par

$$\boxed{\mathbf{n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots \times n \quad pour\ n \geq 1}}$$

Par convention, on pose 0 ! = 1.

<u>Exemple</u> :
Un train comprend 10 wagons. Combien y-a-t-il de façons de constituer ce train sachant que la locomotive se trouve toujours en tête ?

3) <u>Les arrangements</u>

<u>Exemple</u> :
Soient les quatre éléments a, b, c et d. On les arrange 2 à 2. On obtient les douze arrangements suivants :
ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc

<u>Définition</u> : <u>Un arrangement</u> de p éléments choisis parmi n, est une disposition ordonnée de l'ensemble de p des n éléments, chacun d'eux ne pouvant figurer au maximum qu'une fois dans le même arrangement. On note $\mathbf{A}_n^p$ le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n et on a

$$\boxed{\mathbf{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad avec\ \ p \le n}}$$

Exemple :
12 candidats se présentent aux élections à un conseil d'administration comportant 8 places. La liste des élus est publiée suivant le nombre de voix obtenues.
Combien y-a-t-il de listes possibles ?

4) Les combinaisons

Exemple :
Soient les quatre éléments a, b, c et d. On les combine 2 à 2. On obtient les six permutations suivantes :
ab, ac, ad, bc, bd, cd.

Il s'agit donc d'une opération analogue à l'arrangement mais cette fois-ci, deux dispositions comportant les mêmes lettres sont considérées comme identiques quelles que soient les places occupées par ces lettres : une combinaison est donc une disposition non ordonnée.

Définition : Une combinaison de p éléments choisis parmi n, est une disposition non ordonnée de ces p éléments où chacun figure une fois au plus. On note $\mathbf{C}_n^p$ ou $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec p éléments choisis parmi n. On a

$$\boxed{\mathbf{\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad avec\ \ p \le n}}$$

Exemple :
On dispose d'un jeu de 52 cartes. Quel est le nombre de façons d'obtenir les 4 rois ?

<u>Propriétés</u> : 1) $\binom{n}{0} = \mathbf{C_n^0 = 1}$ $\binom{n}{n} = \mathbf{C_n^n = 1}$ $\binom{n}{1} = \mathbf{C_n^1 = n}$

3) $\mathbf{C_n^p = C_n^{n-p}} \Leftrightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2) $\mathbf{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p} \Leftrightarrow \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

<u>Application (Triangle de Pascal)</u>

La formule $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ fournit une méthode commode de calcul par récurrence de C_n^p. La matérialisation de cette formule est appelée **<u>triangle de Pascal</u>**. Chaque terme est la somme du terme immédiatement supérieur et de celui qui se trouve à la gauche de celui-ci.

n \ p	0	1	2	3	4	5	......
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
.							
.							
.							

<u>Formule du binôme</u> : $\mathbf{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k}\, b^k}$

ou $\mathbf{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k}$

<u>5) Application de l'analyse combinatoire au calcul de probabilités.</u>

<u>Exemple</u> :

On dispose d'un jeu de 52 cartes. On choisit 13 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir tous les trèfles ?

III Extension de la notion de probabilités

1) Les axiomes du calcul des probabilités

L'extension de la notion de probabilités au cas où il n'est pas possible de définir un ensemble d'événements équiprobables mais où l'ensemble des événements est fini, ne présente pas de difficulté particulière. Il suffit, en effet, de poser à titre de définition axiomatique de la probabilité, les trois propositions suivantes qui conservent les propriétés précédemment vérifiées dans le cas où on pourrait dénombrer des événements équiprobables.

Axiomes :

Soit E un ensemble fini d'événements.

1) La probabilité associée à tout événement, c'est-à-dire à une partie de E, est **un nombre positif ou nul**.
2) La probabilité associée à l'ensemble E des événements est égale à **1**.

$$\boxed{\mathbf{p(E) = 1}}$$

3) Pour tout couple (A ; B) d'événements incompatibles, la probabilité de la réunion de ces événements est égale à la somme des probabilités de A et B.

$$\boxed{\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}}$$

2) Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales fournit la règle de calcul de la probabilité de la réalisation de l'un ou l'autre au moins des événements.

a) Cas des événements incompatibles

Dans le cas où les événements A et B seraient incompatibles c'est-à-dire où les ensembles A et B sont disjoints, la formule des probabilités totales est constituée de l'axiome 3,

$$\boxed{\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}}$$

Exemple :

On choisit une carte dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ou une dame ?

<u>b) Cas des événements non incompatibles</u>

Soient A et B deux événements non incompatibles c'est-à-dire, les ensembles A et B ont une intersection non vide. La formule des probabilités totales est la suivante :

$$\boxed{\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}}$$

<u>Exemple</u> :

Dans un jeu de 52 cartes, on choisit une carte. Quelle est la probabilité d'obtenir un roi ou un cœur ?

<u>3) La formule des probabilités composées</u>

La formule des probabilités composées fournit la règle de calcul de la probabilité de réalisation simultanée de deux événements. Elle nécessite la définition de la probabilité conditionnelle de deux événements.

a) **<u>Probabilité conditionnelle</u>**

<u>Définition</u> : Soient E un ensemble d'événements sur lequel on définit une probabilité et B un événement de **<u>probabilité non nulle</u>**. On appelle **<u>probabilité conditionnelle</u>** de A liée par B, l'expression

$$\boxed{\mathbf{p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}}}$$

La probabilité conditionnelle de A liée par B exprime la réalisation de l'événement A lorsque l'on sait déjà que l'événement B est réalisé.

b) Formule des probabilités composées

Définition : Soient A et B deux événements de **probabilités non nulles**. **La formule des probabilités composées** est la suivante :

$$\boxed{\mathbf{p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)}}$$

Elle permet de calculer la probabilité de la réalisation simultanée des deux événements A et B.

c) Exemples

1) On dispose d'un sac contenant 10 jetons blancs, 20 rouges et 30 noirs. On prend deux jetons sans les remettre dans le sac. Quelle est la probabilité que le premier soit rouge et le deuxième blanc ?

2) On choisit trois cartes dans un jeu de 52 cartes sans remise. Quelle est la probabilité d'avoir trois rois ?

4) Indépendance des événements

Définition : Soient A et B deux événements de **probabilités non nulles**. On dit que A est **indépendant** de B si

$$\boxed{p_B(A) = p(A)}$$

Remarques : 1) Cela signifie que la probabilité de réalisation de A n'est en rien affectée par le fait que B soit réalisé ou pas.
2) D'après la formule des probabilités composées, on a

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p(A) \times p(B) \text{ et } p(B \cap A) = p_A(B) \times p(A) = p(A \cap B)$$

donc $p_A(B) = p(B)$.

Conclusion : L'indépendance est donc une propriété réciproque. Si A est indépendant de B, alors B est indépendant de A. Par suite, on dit que **A et B sont indépendants** s'ils satisfont la relation

$$\boxed{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$$

Exemples :
1) On jette deux dés. On donne la signification suivante aux événements A et B :
A : « le premier dé présente l'as » ;
B : « la somme des points des deux dés est paire ».
Ces événements sont-ils indépendants ?

2) On jette une pièce de monnaie deux fois. On donne la signification suivante aux événements A et B :

A : « face est obtenu au plus une fois » ;
B : « pile et face sont obtenus au moins une fois chacun ».
Ces événements sont-ils indépendants ?

3) On jette une pièce de monnaie trois fois. On donne la signification suivante aux événements A et B :

A : « face est obtenu au plus une fois » ;
B : « pile et face sont obtenus au moins une fois chacun ».
Ces événements sont-ils indépendants ?

5) Formule des probabilités totales et théorème de Bayes

Définition : Soient E un ensemble d'événements sur lequel on définit une probabilité p et des événements $A_1, A_2, ..., A_n$.

On dit que la famille $(A_1, A_2, ..., A_n)$ est un système complet d'événements de E lorsqu'elle constitue une partition de E c'est-à-dire lorsque l'on a :

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$;
2) $p(A_i) \neq 0$ pour tout i ;
3) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$;

Formule des probabilités totales : Soient E un ensemble d'événements sur lequel on définit une probabilité p et $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un système complet d'événements de E.
Alors, on a la formule suivante :

$$\boxed{\mathbf{p(E) = \sum_{i=1}^{n} p(E \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(E) \times p(A_i)}}$$

Théorème de Bayes : Soient E un ensemble d'événements sur lequel on définit une probabilité p et $(A_1, A_2, ..., A_n)$ un système complet d'événements de E.
Alors, on a la formule suivante :

$$\boxed{\mathbf{p_E(A_k) = \frac{p_{A_k}(E) \times p(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p_{A_i}(E) \times p(A_i)}}}$$

Cas particuliers : Soient E un ensemble d'événements sur lequel on définit une probabilité p et $(A, \overline{A})$ un système complet d'événements de E.
Alors, la formule des probabilités totales devient :

$$\boxed{\mathbf{p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap \overline{A}) = p_A(E) \times p(A) + p_{\overline{A}}(E) \times p(\overline{A})}}$$

et le théorème de Bayes devient :

$$\boxed{\mathbf{p_E(A) = \frac{p_A(E) \times p(A)}{p_A(E) \times p(A) + p_{\overline{A}}(E) \times p(\overline{A})}}}$$

Fin