

*CHAPITRE II : LES
VARIABLES ALÉATOIRES*

I Généralités

Définition : Si à chacun des événements élémentaires de l'ensemble des événements E, on fait correspondre un nombre, on définit **une variable aléatoire X**. Si à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire, on associe la probabilité de l'événement correspondant, on obtient **la loi de probabilité (ou distribution de probabilité)** de la variable aléatoire X.

Exemple :

On lance successivement deux fois une pièce de monnaie. On définit la variable aléatoire X par le nombre de « face » obtenu en ces deux lancers. On définit la loi de probabilité suivante :

Evénement élémentaire	Valeur k de la variable aléatoire X	Probabilité p(X=k)
P_1P_2	0	$\frac{1}{4}$
P_1F_2 ou F_1P_2	1	$\frac{1}{2}$
F_1F_2	2	$\frac{1}{4}$
	Total	1

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2 qui constituent son ensemble de définition.

Remarque : La somme des probabilités composant une loi de probabilité est toujours égale à 1. En effet, elle est égale à la somme des probabilités de tous les événements élémentaires.

Définition : On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X, **la fonction numérique positive** F_X telle que

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

Celle-ci indique la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure ou égale à une valeur déterminée x.

Notations : On désigne généralement par X (ou Y ou Z) une variable aléatoire et par x (ou y ou z) une valeur de celle-ci.

Remarques : 1) On a $p(X > x) = 1 - p(X \leq x) = 1 - F_X(x)$.

2) On a : $p(X < x) = p\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(X \leq x - \frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right)$.

3) On en déduit : $p(X = x) = p(X \leq x) - p(X < x) = F_X(x) - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_X\left(x - \frac{1}{n}\right)$.

On distingue **les variables aléatoires discrètes** et **les variables aléatoires continues**. On retrouve ici une classification analogue à celle rencontrée pour les variables statistiques. On notera d'ailleurs l'analogie qui existe, d'une façon générale, entre variables aléatoires et variables statistiques. La notion de probabilité remplace pour les variables aléatoires la notion de fréquence pour les variables statistiques : une probabilité est la fréquence idéale correspondant à un nombre fini d'observations.

II Variable aléatoire discrète

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X est **discrète** lorsque ses différentes valeurs sont **en nombre fini ou infini dénombrable**.

Définition : On dit que les valeurs sont en **nombre infini dénombrable** lorsqu'il y en a une infinité et que l'on peut les compter.

1) Loi de probabilité

La probabilité associée à chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire discrète X est la probabilité de l'événement correspondant. La représentation graphique est le diagramme en bâtons.

Exemple :

On jette deux dés. On définit la variable aléatoire X comme étant la somme des points obtenus par les deux dés. L'ensemble des valeurs possibles ou ensemble de définition de la variable X , est l'ensemble $\{2, 3, \dots, 12\}$. C'est un ensemble fini.

Donner la loi de probabilité de X et la représenter graphiquement.

2) Fonction de répartition

Définition : La fonction de répartition de la variable discrète X , définie par

$F_X(x) = p(X \leq x)$ est une fonction positive, non décroissante.

Cette fonction est égale à **0** pour $-\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et à **1** pour $+\infty$

c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Lorsque l'ensemble des valeurs possibles ou ensemble de définition de la variable aléatoire X est fini, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, F_X **est nulle sur** $]-\infty, x_1[$ et **égale à 1 sur** $]x_n, +\infty[$.

La fonction de répartition garde la même valeur $F_X(x)$ sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}[$. Au point d'abscisse x_i , elle fait un saut égal à la probabilité attachée à la valeur x_i .

Remarque : On calcule aisément les valeurs de la fonction de répartition à partir des probabilités attachées aux valeurs possibles de la variable discrète :

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} p(X = x_i)$$

Inversement, la fonction de répartition permet de reconstituer facilement la distribution de probabilité.

$$p(X = x_i) = F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i)$$

Représentation graphique

La représentation graphique de la fonction de répartition est **la courbe cumulative**. Dans le cas d'une variable discrète, on l'appelle encore **courbe en escalier** à cause de sa forme. Elle présente des « marches » ou sauts au point d'abscisse x_i correspondant aux valeurs possibles de la variable. La fonction de répartition est l'équivalent, pour les variables aléatoires, de la fonction cumulative de fréquence pour les variables statistiques.

Exemple :

On lance successivement trois fois une pièce de monnaie. On définit la variable aléatoire X par le nombre de « face » obtenu en ces trois lancers. L'ensemble de définition de X est $\{0, 1, 2, 3\}$.

Evénement élémentaire	Valeur x de la variable aléatoire X	Probabilité $p(X=x)$
$P_1 P_2 P_3$	0	$\frac{1}{8}$
$P_1 P_2 F_3$ ou $P_1 F_2 P_3$ ou $F_1 P_2 P_3$	1	$\frac{3}{8}$
$P_1 F_2 F_3$ ou $F_1 F_2 P_3$ ou $F_1 P_2 F_3$	2	$\frac{3}{8}$
$F_1 F_2 F_3$	3	$\frac{1}{8}$
Total		1

Déterminer la fonction de répartition F_X et la représenter graphiquement

III Variables aléatoires continues

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** lorsque son ensemble de définition est **un intervalle**.

1) Fonction de répartition

Définition : La distribution de probabilité d'une variable aléatoire continue est définie par **sa fonction de répartition** F_X donnée par $F_X(x) = p(X \leq x)$.

F_X est une fonction positive et croissante.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Si la fonction F_X est continue et admet une dérivée f , on dit que la variable X est **absolument continue**.

Représentation graphique

La courbe cumulative (ou courbe de répartition) est la représentation graphique de la fonction de répartition F_X .

2) Probabilité attachée à un intervalle

La probabilité que X appartienne à l'intervalle $[a, b]$ est égale, par définition, à la différence des valeurs prises par la fonction de répartition aux extrémités de l'intervalle.

$$p(a \leq X \leq b) = p(X \leq b) - p(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

3) Probabilité attachée à un point

Lorsque la variable X est absolument continue, la probabilité attachée à un point x est **nulle**.

4) Densité de probabilité en un point

La probabilité attachée à l'intervalle $[a, b]$ est : $p(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

La densité moyenne de probabilité sur l'intervalle $[a, b]$ est le rapport de cette probabilité à la longueur de l'intervalle. On la note **$f(a, b)$** et

$$f(a, b) = \frac{F_X(b) - F_X(a)}{b - a}$$

La densité moyenne de probabilité sur un petit intervalle $[x, x + \Delta x]$ est par

conséquent : $f(x, x + \Delta x) = \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x}$.

Définition : On appelle **densité de probabilité $f(x)$ au point x** , la valeur limite de la densité moyenne sur l'intervalle $[x, x + \Delta x]$ lorsque la longueur Δx de cet intervalle tend vers 0.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = F_X'(x)$$

Définition : On dit qu'une fonction f est une fonction de densité de probabilité si f est continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points), positive sur \mathbb{R} et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Sa représentation graphique est la courbe de densité de probabilité.

Remarque : La fonction densité de probabilité est donc la dérivée de la fonction de répartition.

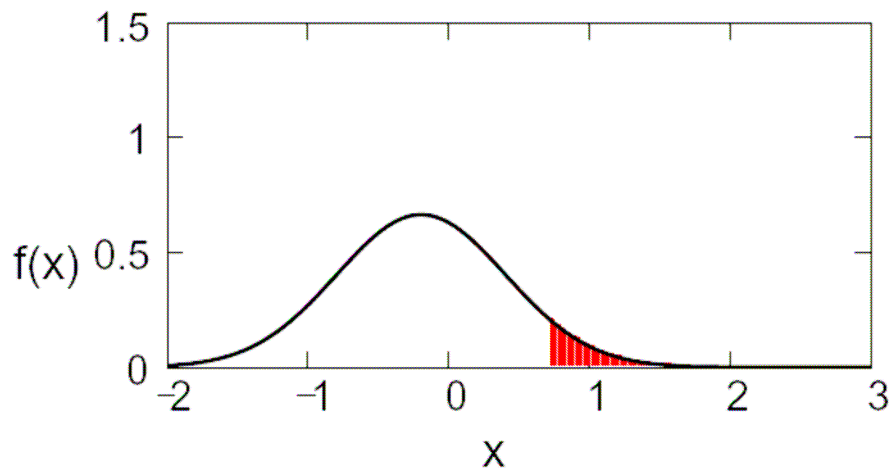
Définition : La probabilité élémentaire pour que la variable aléatoire X prenne une valeur intérieure à l'intervalle infinitésimal de longueur dx entourant le point x , est égale au produit de la densité de probabilité par la longueur de l'intervalle.

$$p(x \leq X \leq x + dx) = f(x) dx$$

La probabilité attachée à l'intervalle $[a, b]$ apparaît comme la somme prise entre a et b de ces probabilités élémentaires

$$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$$

Exemple : Dans le schéma ci-dessous, l'aire de la partie grisée est égale à la probabilité $p(0,7 \leq X \leq 1,5)$



Remarque : L'aire comprise entre la courbe de densité de probabilité et l'axe des abscisses est égale à 1 puisque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^0 f(x) dx + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{t_2} f(x) dx = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \left[F_X(x) \right]_{t_1}^0 + \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} \left[F_X(x) \right]_0^{t_2} = F_X(0) - 0 + 1 - F_X(0) = 1.$$

La valeur $F_X(x_0)$ de la fonction de répartition est la somme de toutes les probabilités élémentaires correspondant aux valeurs x inférieures à x_0 . $F_X(x_0)$ est donc égal à l'aire comprise entre la courbe de densité de probabilité, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = x_0$, c'est-à-dire : $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx$.

IV Caractéristiques d'une variable aléatoire

1) Espérance mathématique

a) Définition

Définition : L'espérance mathématique $E(X)$ ou μ de la variable aléatoire X est la moyenne arithmétique des valeurs possibles pondérées par les probabilités correspondantes.

α) Cas des variables discrètes

On note D l'ensemble de définition de X , x_i l'un des éléments de D et p_i la probabilité que la variable aléatoire X soit égale à x_i , c'est-à-dire $p(X = x_i) = p_i$. Alors

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i \in D} p_i x_i$$

Exemple :

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de points amenés par un dé. Calculer son espérance mathématique.

β) Cas des variables continues

Soit $f(x)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire X au point x . Alors :

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Exemple :

La variable aléatoire de Cauchy est définie par la fonction densité de probabilité f

définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

Calculer son espérance mathématique.

b) Propriétés de l'espérance mathématique

Propriété 1 : Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors,

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Propriété 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

L'espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances mathématiques. Par conséquent,

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

Propriété 3 : Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors,

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

L'espérance mathématique d'un produit de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances mathématiques.

Remarque : Ces trois propriétés sont valables dans les cas de variables aléatoires continues ou discrètes.

Application : espérance mathématique d'une moyenne de variables aléatoires

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires suivant une loi de probabilité quelconque d'espérance mathématique μ . Leur moyenne $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ est elle-même une variable aléatoire.

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n}(E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)) \\ &= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \dots + \mu) = \frac{\mu n}{n} = \mu. \end{aligned}$$

Définition : Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ . On appelle **valeur centrée de X , la variable aléatoire $Y = X - \mu$.**

Propriété 4 : Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ . Alors l'espérance mathématique de la valeur centrée de X est nulle.

2) Variance

a) Définition

Définition : La variance $V(X)$ d'une variable aléatoire X d'espérance mathématique μ est égale à l'espérance mathématique des carrés des écarts à l'espérance mathématique :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E\left((X - \mu)^2\right)$$

α) Cas des variables discrètes

On note D l'ensemble de définition de X , x_i l'un des éléments de D et p_i la probabilité que la variable aléatoire X soit égale à x_i c'est-à-dire $p(X = x_i) = p_i$ et μ l'espérance mathématique de X . Alors

$$V(X) = \sum_{x_i \in D} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{x_i \in D} p_i (x_i - \mu)^2$$

Exemple :

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de points amenés par un dé. On a trouvé $\mu = E(X) = 3,5$. Calculer $V(X)$.

β) Cas des variables continues

Soient $f(x)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire X au point x et μ l'espérance mathématique de X . Alors :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

Dans les deux cas, **l'écart-type** $\sigma(X)$ est égal à la racine carrée de la variance.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

b) Propriétés de la variance

Propriété 5 : Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors,

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Propriété 6 : Soient X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**. Alors,

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

La variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances. Par conséquent,

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque : Ces deux propriétés sont valables dans les cas de variables aléatoires continues ou discrètes.

Application : variance d'une moyenne de variables aléatoires indépendantes

Soient X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de probabilité quelconque d'espérance mathématique μ et de variance σ^2 . Leur moyenne $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ est elle-même une variable aléatoire.

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)) \\ &= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2 n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Définition : Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématiques μ et d'écart-type σ . On appelle **valeur centrée-réduite de X**, **la variable aléatoire** $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Propriété 7 : Soit X une variable aléatoire d'espérance mathématique μ . Alors l'espérance mathématique de la valeur centrée-réduite de X est nulle et son écart-type vaut 1.

3) Covariance de variables aléatoires

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires. **La covariance** de X et Y est notée **cov(X, Y)** et est définie par

$\text{cov}(X, Y) = E(X \times Y) - E(X) \times E(Y)$

Propriété 8 : La covariance de deux variables aléatoires **indépendantes** est **nulle**.

4) Moments

Définition : On appelle **moment d'ordre k** de la variable aléatoire X , l'espérance mathématique de X^k . On le note **m_k** et

$m_k = E(X^k)$

a) Cas des variables discrètes

On note D l'ensemble de définition de X , x_i l'un des éléments de D et p_i la probabilité que la variable aléatoire X soit égale à x_i c'est-à-dire $p(X = x_i) = p_i$. Alors

$E(X^k) = \sum_{x_i \in D} p_i x_i^k$

b) Cas des variables continues

Soit $f(x)$ la densité de probabilité de la variable aléatoire X au point x . Alors :

$$\mathbf{E(X^k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x^k f(x) dx}$$

c) Propriétés

Moment d'ordre 1 : $m_1 = E(X)$

Moment d'ordre 2 : $m_2 = E(X^2)$

Expression de la variance en fonction des moments : théorème de Koenigs-Huygens

$$\mathbf{V(X)} = \mathbf{m_2 - (m_1)^2 = E(X^2) - (E(X))^2}$$

Fin