CHAPITRE V : LES LOIS DE PROBABILITE CONTINUES

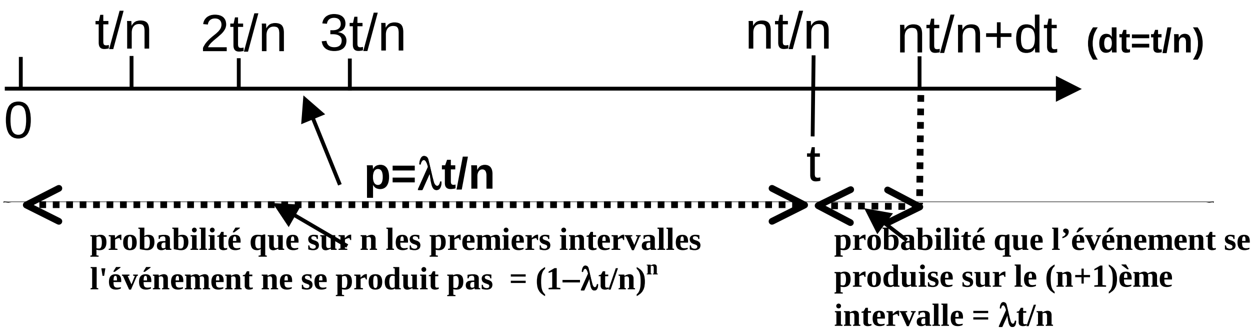
I) La loi de probabilité exponentielle

1) Introduction

Extrait du cours de l'UPPA : Professeur : Marc Artzrouni :

La situation se passe à un standard téléphonique. L'expérience consiste à compter la durée d'attente avant le premier appel. L'unité de temps est la minute. L'intervalle de temps entre deux instants 0 et t est découpé en n petits intervalles de longueur dt = $\frac{t}{n}$.

La probabilité p du succès sur chaque intervalle de longueur $\frac{t}{n}$ est p = $\lambda\frac{t}{n}$. Elle est proportionnelle à la longueur de l'intervalle. Le coefficient de proportionnalité λ mesure la fréquence du phénomène. Les événements sont indépendants les uns des autres.



La variable aléatoire X compte le nombre d'expériences jusqu'au premier événement, le succès. **X est une loi géométrique de paramètre** $\lambda\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{n}}$.

On a : $n\frac{t}{n}+dt = n\frac{t}{n}+\frac{t}{n} = (n+1)\frac{t}{n}$.

La probabilité qu'un appel téléphonique arrive entre les instants t et t + dt est :

$$\boxed{\mathbf{p(X = n+1) = \left(1-\lambda\frac{t}{n}\right)^{n}\lambda\frac{t}{n} = e^{n\ln\left(1-\lambda\frac{t}{n}\right)}\lambda dt}}$$

On a : $e^{n\ln\left(1-\lambda\frac{t}{n}\right)}\lambda dt \underset{+\infty}{\sim} e^{-n\lambda\frac{t}{n}}\lambda dt \underset{+\infty}{\sim} \lambda e^{-\lambda t}dt$. Donc, lorsque n tend vers + ∞, cette probabilité tend vers $\lambda e^{-\lambda t}dt$.

Si on prend par exemple, t = 2, n = 120 et λ = 1.2, on obtient dt = 0.017 . De plus, la probabilité que le premier appel ait lieu entre la deuxième minute et 2 minutes et 1 seconde est p(X = 121) = $\left(1-\lambda\frac{t}{n}\right)^{n}\lambda\frac{t}{n}$ = 0.00177076.

D'autre part, $\lambda e^{-\lambda t}dt$ = 0.00181436. Ces deux valeurs sont très proches.

Fin de l'extrait du cours de l'UPPA : Professeur : Marc Artzrouni

<u>2) Définition</u>

<u>Définition</u> : <u>Une variable aléatoire exponentielle</u> X est une variable **<u>continue</u>**, pouvant prendre n'importe quelle valeur entre 0 et $+\infty$ avec la densité de probabilité

$$\boxed{\mathbf{dexp(x,\ \lambda) = f(x) = \lambda e^{-\lambda x}}}$$

où λ est un paramètre réel strictement positif.
La fonction de répartition est F

$$\boxed{\mathbf{pexp(x,\ \lambda) = p(X \le x) = F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt}\ .}$$

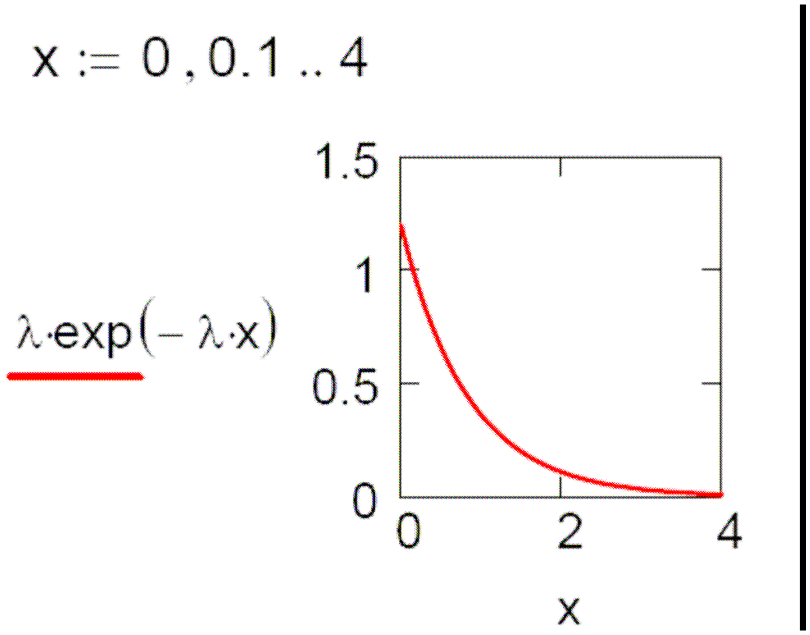
On a : $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{pexp(x,\ \lambda) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}. \\ \mathbf{et\ p(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}}\end{array}}$$

Les notations dexp(x, λ) et pexp(x, λ) sont celles du logiciel MathCad.

Courbe de densité : La courbe de densité de probabilité de la loi exponentielle est une courbe exponentielle décroissante.



3) Caractéristiques de la loi exponentielle X de paramètre λ

a) L'espérance mathématique

Définition : L'espérance mathématique de X est

$$\boxed{\mathbf{E(X) = \frac{1}{\lambda}}}$$

b) La variance et l'écart-type

Définition : La variance de X est

$$\boxed{\mathbf{V(X) = \frac{1}{\lambda^2}}}$$

L'écart-type de X est

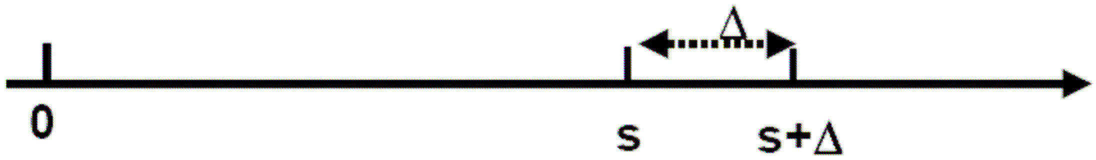
$$\boxed{\mathbf{\sigma (X) = \frac{1}{\lambda}}}$$

Remarque : Le paramètre λ de la loi exponentielle X est donc égal à la fois à l'inverse de l'espérance mathématique et à l'inverse de l'écart-type.

<u>4) Application à la loi exponentielle : l'absence de mémoire</u>

<u>Extrait du cours de l'UPPA : Professeur : Marc Artzrouni</u> :

Soit X la variable aléatoire exponentielle de paramètre λ. Supposons par exemple que X représente le temps jusqu'à l'arrivée d'un client dans un magasin ou le temps jusqu'au décès d'un organisme.
On cherche la probabilité : $p_{(X>s)}(s \le X \le s+\Delta)$.



On a : $p_{(X>s)}(s \le X \le s+\Delta) = \dfrac{p((s \le X \le s+\Delta) \cap (X > s))}{p(X > s)} = \dfrac{p(s \le X \le s+\Delta)}{e^{-\lambda s}} =$

$$\frac{\left[-e^{-\lambda t}\right]_s^{s+\Delta}}{e^{-\lambda s}} = \frac{-e^{-\lambda(s+\Delta)} + e^{-\lambda s}}{e^{-\lambda s}} = \frac{e^{-\lambda s}\left(-e^{-\lambda\Delta} + 1\right)}{e^{-\lambda s}} = 1 - e^{-\lambda\Delta} = \int_0^{\Delta} \lambda e^{-\lambda t} dt =$$

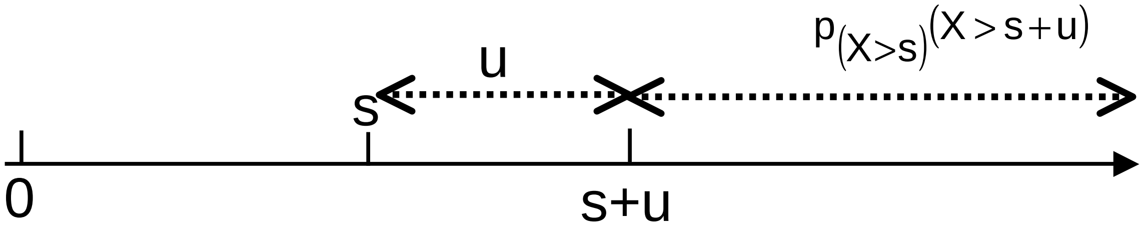
$p(X \le \Delta)$.

Donc si à l'instant s l'événement ne s'est pas encore produit, la probabilité qu'il se produise entre s et s + Δ est indépendante de s. **C'est l'absence de mémoire : quel que soit le temps s qui s'est écoulé, la probabilité que l'événement se produise durant le petit intervalle $[s, s+\Delta]$ est indépendante de s.**

<u>Deux exemples</u> :

1) Considérons X la variable aléatoire mesurant le temps d'attente d'un client. L'absence de mémoire est raisonnable. Les clients arrivent indépendamment les uns des autres. Le fait qu'aucun client ne soit arrivé dans les 5 dernières minutes ne change rien à la probabilité d'une arrivée dans la seconde qui suit.
2) Considérons X la variable aléatoire mesurant la durée de vie. Pour un enfant de 10 ans (s = 10) la probabilité de décès dans l'année qui suit (Δ = 1) est très faible : 0.1%. Pour une personne de 105 ans (s = 105), la probabilité de décès dans l'année qui suit (Δ = 1) est très forte : entre 5 et 10 %. Il y a une forte mémoire. La probabilité de décès dans l'année qui suit, augmente avec l'âge (s) et donc il serait déraisonnable de supposer que la durée de vie est une variable aléatoire exponentielle.

Plus généralement, on peut s'intéresser à $p_{(X>s)}(X > s+u)$:



$$p_{(X>s)}(X > s+u) = \frac{p((X > s+u) \cap (X > s))}{p(X > s)} = \frac{p(X > s+u)}{p(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+u)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda u} = p(X > u).$$

La probabilité qu'il faille attendre au moins u instants supplémentaires avant que l'événement ne se produise, est indépendante du temps s qui s'est écoulé avant u.
Fin de l'extrait du cours de l'UPPA : Professeur : Marc Artzrouni

II La loi de Poisson

La loi de Poisson convient à la description d'événements dont les chances de réalisation sont faibles. Comme dans le cas de la distribution binomiale, il est nécessaire pour que la loi s'applique que la probabilité de réalisation de l'événement reste constante.

1) Définition

Définition : La variable aléatoire de Poisson X est une variable **discrète** qui prend les valeurs entières 0, 1, 2, ... avec les probabilités :

$$\boxed{\mathbf{dpois(k, \lambda) = p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}}$$

où λ est un paramètre strictement positif.
La notation dpois(k, λ) est celle du logiciel MathCad.
Symboliquement, nous noterons X par **P(λ) (ou N(1))** pour indiquer que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

2) Caractéristiques de la loi de Poisson

a) L'espérance mathématique

Définition : L'espérance mathématique (ou moyenne) de la loi de Poisson est

$$\boxed{E(P(\lambda)) = \lambda}$$

a) La variance et l'écart-type

Définition : La variance de la loi de Poisson est

$$\boxed{V(P(\lambda)) = \lambda}$$

Définition : L'écart-type de la loi de Poisson est

$$\boxed{\sigma(P(\lambda)) = \sqrt{\lambda}}$$

Remarque : Le paramètre λ de la loi de Poisson a une double signification : il est égal à la fois à l'espérance mathématique et à la variance de la distribution.

3) Conditions d'application

La loi de Poisson peut être introduite :

- soit comme un cas particulier de la loi binomiale : c'est la loi vers laquelle tend celle-ci lorsque le nombre n devient grand alors que la probabilité p reste faible. C'est la raison pour laquelle la loi de Poisson a été souvent appelée **« loi des petits nombres »** ;
- soit comme la résultante d'un processus aléatoire particulier, **le processus de Poisson**.

a) Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire binomiale $X = B_{n,p}$ dont le paramètre n croît indéfiniment et dont le paramètre p tend vers 0 de sorte que le produit np tende vers une limite finie λ. Dans ces conditions, la loi binomiale tend vers la loi de Poisson de paramètre λ.

$$\boxed{B_{n,p} \longrightarrow P(np)}$$

Ce résultat permet de remplacer la loi binomiale par la loi de Poisson lorsque n est grand, p petit et le produit **$\lambda = np$** étant petit, de l'ordre de quelques unités.

<u>Proposition</u> : Habituellement, on considère que **<u>l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson</u>** est acceptable lorsque **$n \geq 50$ et $p < 0,1$**.

<u>Remarque</u> : Cette convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson explique que l'on rencontre celle-ci, par exemple dans les cas suivants :

- nombre de pièces défectueuses dans un échantillon important prélevé au cours d'un processus de fabrication en série : en général, la proportion de pièces défectueuses dans l'ensemble de la fabrication est faible ;
- nombre d'erreurs commises dans l'inventaire d'un stock comportant un grand nombre d'articles différents : d'une façon générale, nombre d'erreurs commises au cours d'une longue suite d'opérations.

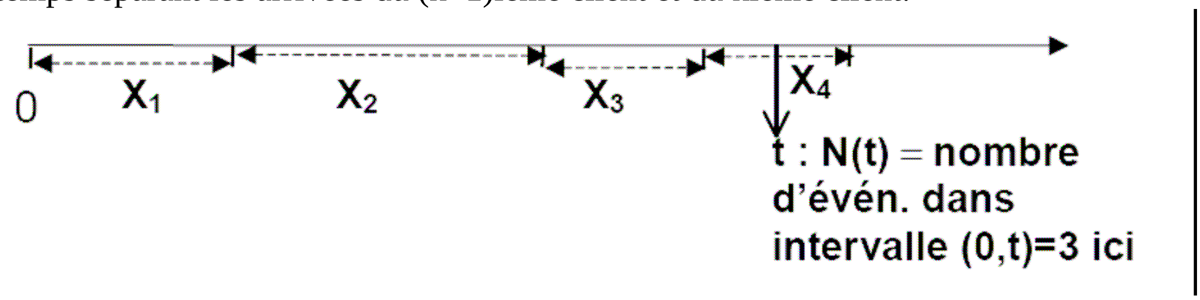
b) <u>Loi exponentielle X de paramètre λ et processus de Poisson : le nombre d'événements dans</u> $[0,t]$

<u>Extrait du cours de l'UPPA : Professeur : Marc Artzrouni</u> :

<u>Interprétation de λ et exemple</u>

L'espérance de X, variable aléatoire de paramètre λ = 0.1 (par exemple) est $\frac{1}{\lambda}$ = 10. La durée moyenne jusqu'à l'événement « succès » (arrivée d'un client dans un magasin, par exemple) est 10 minutes. Le nombre de client par minute est donc 0.1 = $\frac{1}{10} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda$. Autrement dit, λ est un taux : c'est le nombre moyen d'événements par unité de temps.

Par exemple : appelons X_1 la variable aléatoire exponentielle mesurant le temps jusqu'à l'arrivée du premier client dans un magasin. Plus généralement, X_k est le temps séparant les arrivées du (k–1)ième client et du kième client.



On note N(t) la variable aléatoire comptant le nombre d'événements dans l'intervalle $[0,t]$.

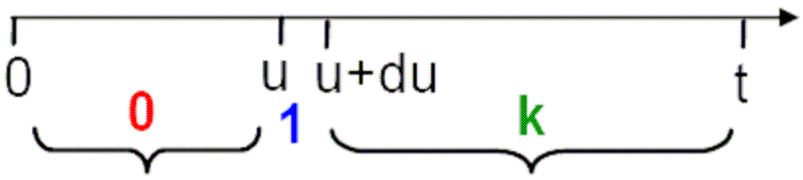
Rappelons que les X_k sont des répliques de la même variable aléatoire exponentielle de paramètre λ = 0.1 client par minute, c'est-à-dire, le taux d'arrivée moyen. L'espérance de chaque X_k est $\frac{1}{\lambda}$ = 10.

Ne pas confondre les X_k, variables aléatoires continues mises bout à bout et N(t), qui une variable aléatoire discrète qui à un instant t donne le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle $[0, t]$.
Ce processus stochastique (aléatoire) est appelé processus de Poisson. Et la loi N(1) est une loi de Poisson. On appelle les X_k les temps « inter-arrivées » : ce sont les temps entre deux arrivées consécutives de clients dans un magasin, de voitures à un péage, d'appels à un standard téléphonique, de clics sur un site Internet, ….

__Processus, loi de Poisson__
Dans le contexte d'un processus de Poisson, on va s'intéresser à la loi de la variable aléatoire discrète N(t), c'est-à-dire que pour t fixé, on va chercher p(N(t) = k) pour tout entier naturel k. On va montrer par récurrence que p(N(t) = k) = $e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$.

On note (P_k) la propriété : p(N(t) = k) = $e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$.
Pour k = 0, p(N(t) = 0) signifie qu'aucun événement ne s'est produit à l'instant t. Cela veut dire que X_1, variable aléatoire exponentielle de paramètre λ est strictement supérieure à t, ce qui se produit avec une probabilité $e^{-\lambda t}$.

De plus, $e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$. Donc (P_0) est vraie.
On suppose que (P_k) est vraie et on démontre que (P_{k+1}) est vraie.
On cherche p(N(t) = k+1).



Pour tout u, on va calculer la probabilité $\pi(u)du$ que le premier événement se produise dans un intervalle de temps $[u, u+du]$ puis que les k suivants se produisent dans l'intervalle $[u+du, t]$ de longueur approximativement égale à t – u. p(N(t) = k+1) sera alors égale à la somme des $\pi(u)du$ pour toutes les valeurs possibles de u entre 0 et t c'est-à-dire $\int_0^t \pi(u)du$.

La probabilité qu'aucun événement ne se produise sur $[0,u]$ est : $e^{-\lambda u}$, celle qu'un seul se produise sur $[u, u+du]$ est : λ du puis celle que les k suivants se produisent sur $[u+du, t]$ est : $e^{-\lambda(t-u)}\dfrac{(\lambda(t-u))^k}{k!}$ (d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $t-u$).

On obtient ainsi $\pi(u)du = e^{-\lambda u}$ x λ du x $e^{-\lambda(t-u)}\dfrac{(\lambda(t-u))^k}{k!} = \lambda^{k+1}e^{-\lambda t}\dfrac{(t-u)^k}{k!}du$

Ainsi, $p(N(t) = k+1) = \int_0^t \pi(u)du = \dfrac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda t}}{k!}\int_0^t (t-u)^k du = \dfrac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda t}}{k!}\left[\dfrac{-(t-u)^{k+1}}{k+1}\right]_0^t$

$= \dfrac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda t}}{(k+1)\ !}t^{k+1} = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)\ !}$. Donc ($P_{k+1}$) est vraie.

On vient de montrer que (P_k) est vraie pour tout entier naturel k.

4) La loi N(t)

a) Définition

Proposition : La loi de N(t) est donnée par

$$\boxed{\mathbf{p(N(t) = k) =} \ e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}}$$

Pour t = 1, on trouve la loi de Poisson de paramètre λ. C'est la loi discrète du nombre d'événements dans l'intervalle $[0,1]$.

b) Caractéristiques de la loi N(t)

α) L'espérance mathématique

Définition : L'espérance mathématique de la loi N(t) est

$$\boxed{\mathbf{E(N(t)) = \lambda t}}$$

a) La variance et l'écart-type

Définition : La variance de la loi N(t) est

$$\boxed{\mathbf{V(N(t)) = \lambda t}}$$

<u>L'écart-type</u> de la loi N(t) est

$$\boxed{\sigma(N(t)) = \sqrt{\lambda t}}$$

Fin de l'extrait du cours de l'UPPA : Professeur : Marc Artzrouni

III) La loi uniforme

1) Définition

<u>Définition</u> : Une variable aléatoire **<u>continue</u>** X suit **<u>une loi uniforme</u>** sur l'intervalle réel $[a, b]$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

On la notera $\mathcal{U}(a, b)$.

2) Caractéristiques de la loi uniforme

b) L'espérance mathématique

<u>Définition</u> : <u>L'espérance mathématique</u> de la loi $\mathcal{U}(a, b)$ est

$$\boxed{E(\mathcal{U}(a, b)) = \frac{b+a}{2}}$$

c) La variance et l'écart-type

<u>Définition</u> : <u>La variance</u> de la loi $\mathcal{U}(a, b)$ est

$$\boxed{V(\mathcal{U}(a, b)) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

<u>L'écart-type</u> de la loi $\mathcal{U}(a, b)$ est

$$\boxed{\sigma(\mathcal{U}(a, b)) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}}$$

Fin