CHAPITRE VI : SIMULATION

I) La variable aléatoire r

Extrait du cours de l'UPPA : Professeur : Marc Artzrouni :

L'ordinateur (ou la calculatrice UPPA) peut engendrer la variable aléatoire r entre 0 et 1.

Par exemple : r = rnd(1)   r = 0.729

Sur la calculatrice UPPA, touche PRB, puis RAND.

r tombe entre 0 et 1 et elle est *uniformément distribuée* sur l'intervalle $(0,1)$. Pour mieux comprendre, on va utiliser l'ordinateur pour produire un grand nombre de répliques de r. Cela permettra d'étudier *la distribution* de r en regardant les fréquences empiriques avec lesquelles r tombe dans les intervalles $[0, 0.1[$, $[0.1, 0.2[$, …, $[0.9, 1[$.

On désigne par : ni le nombre d'intervalles pour les fréquences : ici, ni = 10

: n1 le nombre d'expériences (c'est-à-dire le nombre de répliques, de tirages de la variable aléatoire, r)

Le vecteur des fréquences sera noté F1 : un vecteur de ni composantes, qui donne la fréquence avec laquelle r est tombé dans chacun des ni intervalles quand on a un échantillon de taille n1 (n1 « tirages » de r).

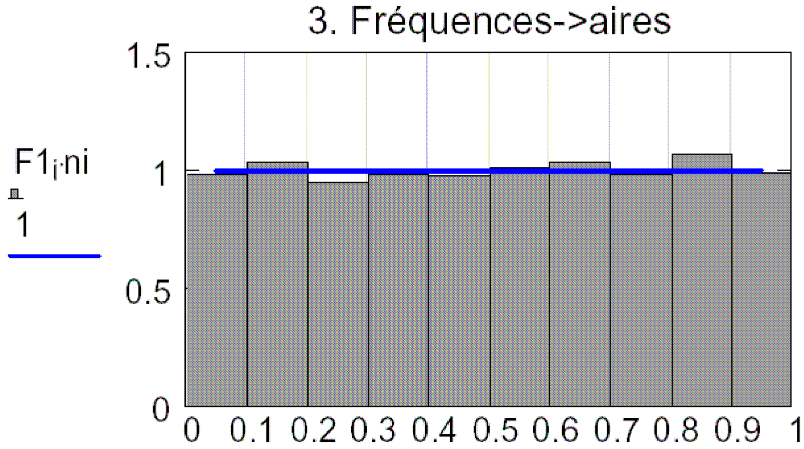
ni= 10 et n1 = 1000

$F1^T$ =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.098	0.103	0.095	0.099	0.097	0.101	0.103	0.098	0.107	0.099

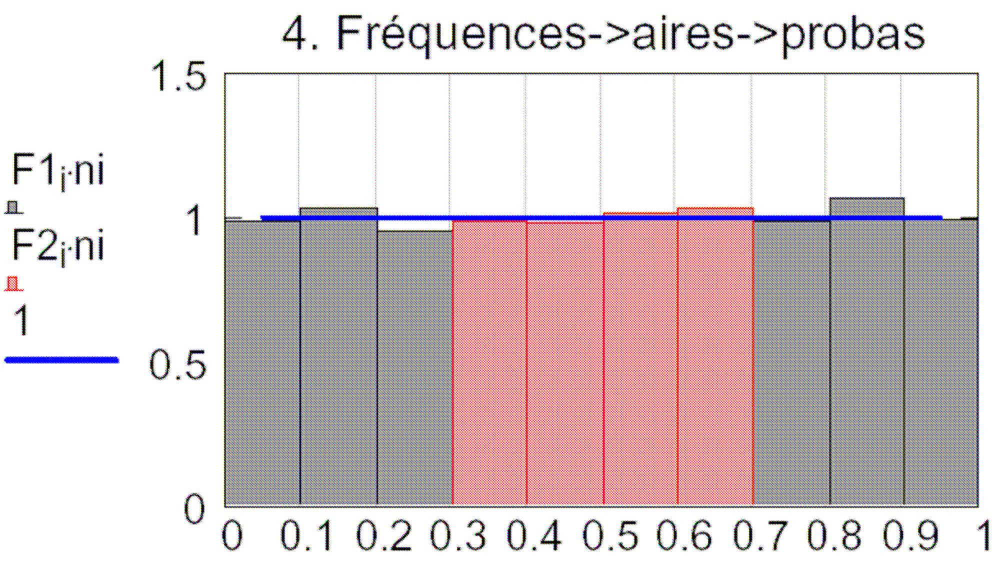
Ce vecteur de fréquences veut dire que r est tombé 100 x $F1_{ni \times 0.3}$ = 9.51 % du temps entre $0.3 - \frac{1}{ni}$ = 0.2 et 0.3 (ni x 0.3 = 3 = 3ème élément de F1).

$i := 1 .. ni$



On voit que la fréquence F1 avec laquelle r tombe dans un intervalle donné i (l'aire du rectangle) converge quand n1, la taille de l'échantillon tend vers l'infini ($n1 \to +\infty$). La hauteur de chaque rectangle tend vers la fonction f représentée par la droite horizontale et définie par f(x) = 1 avec une aire $F1_i$ qui, quand $n1 \to +\infty$, tend vers l'aire limite $1 \times \frac{1}{ni} = \frac{1}{ni}$ = la probabilité (théorique) de tomber dans l'intervalle.

($\frac{1}{ni}$ = 0.1 pour ni = 10 intervalles)



La fréquence (aire des rectangles pour les abscisses allant de 0.3 à 0.7) avec laquelle r tombe entre ab = 0.3 et ah = 0.7 tend vers l'aire sous la droite horizontale représentée par la fonction f définie par f(x) = 1 entre 0.3 et 0.7 c'est-à-dire 0.7 – 0.3 = 0.4.
C'est cette aire que l'on définit comme la probabilité $p(0.3 < r < 0.7) = 0.4$. **Avec la fonction f égale à 1 sur $(0,1)$, la probabilité que r tombe dans un intervalle quelconque est égale à la longueur de cet intervalle.**

Exercice

En utilisant le schéma de la page précédente, quelle est la probabilité que r tombe

1) en dessous de 0.2 ?

2) en dessous de 0.2 ou au dessus de 0.7 ?

Si on veut simuler un événement de probabilité 0.4, on tire au hasard une valeur de r, et on dit si : « si 0.3 < r < 0.7 alors l'événement s'est produit » puisque la probabilité que r tombe entre 0.3 et 0.7 est précisément 0.4. On peut utiliser n'importe quel intervalle de longueur 0.4 à l'intérieur de $(0,1)$: par exemple $(0, 0.4)$.

Remarque

L'aire (ou la probabilité) peut s'écrire $p(0.3 < r < 0.7) = \int_{0.3}^{0.7} f(x)\,dx = \int_{0.3}^{0.7} 1\,dx$.

La fonction f s'appelle la densité de probabilité de la variable aléatoire.
Ici, $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$, et $f(x) = 0$ sinon.
Avec F une primitive de f, $F(x) = x$, l'aire comprise entre 0.3 et 0.7 est $F(0.7) - F(0.3) = 0.7 - 0.3 = 0.4$.

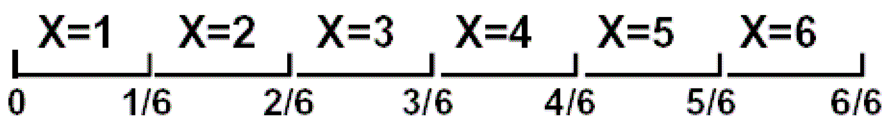
II) Simulation du jet d'un dé

On veut simuler le résultat X d'un jet de dé de façon efficace, rapide, à l'aide de l'ordinateur.

Il s'agit de simuler six événements distincts, ayant chacun une probabilité $\frac{1}{6}$ (≈ 0.167). Pour simuler un jet, on tire donc une valeur de la variable aléatoire r, dont on sait quelle tombe dans tout intervalle de longueur $\frac{1}{6}$ avec une probabilité $\frac{1}{6}$.

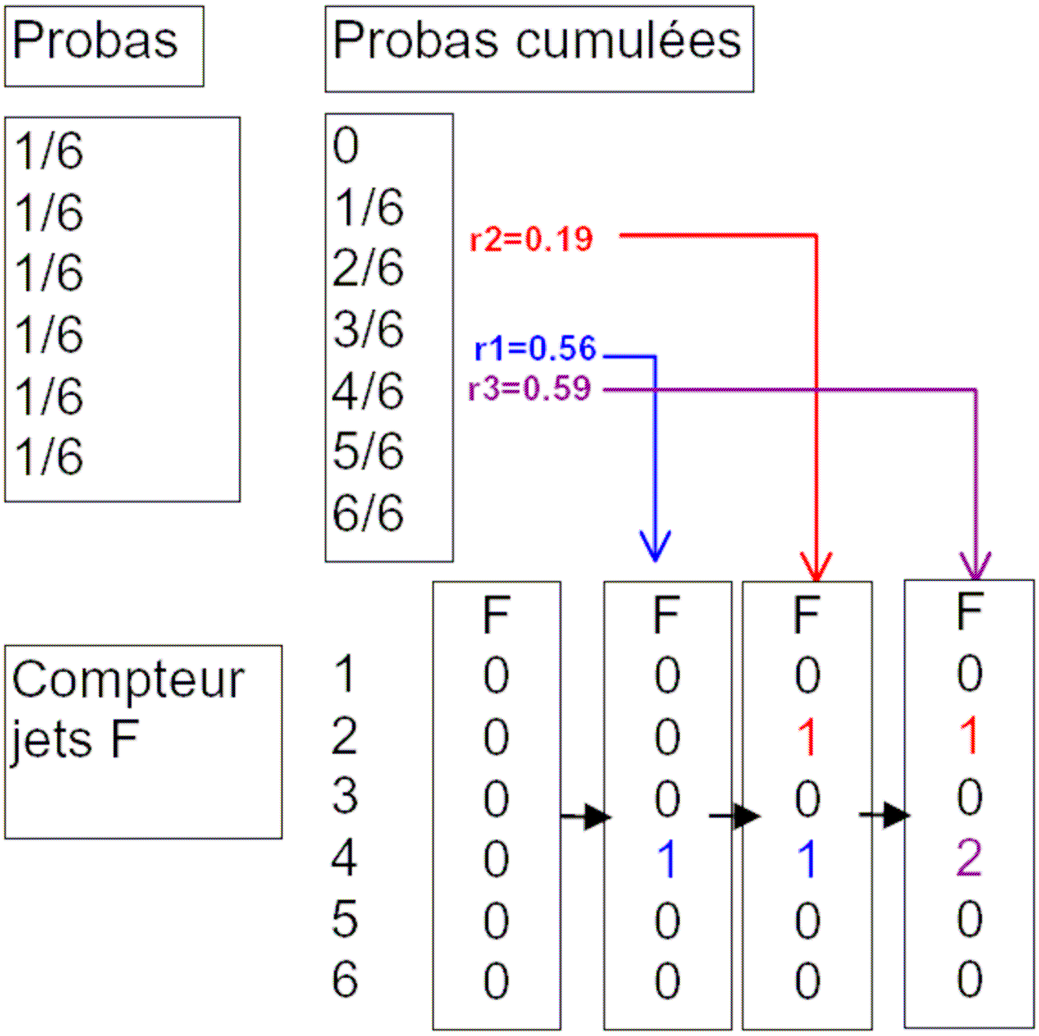
On décide alors que :

Quand r tombe entre 0 et $\frac{1}{6}$, on dit X = 1, quand r tombe entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{2}{6}$, on dit X = 2, quand r tombe entre $\frac{2}{6}$ et $\frac{3}{6}$, on dit X = 3, quand r tombe entre $\frac{3}{6}$ et $\frac{4}{6}$, on dit X = 4, quand r tombe entre $\frac{4}{6}$ et $\frac{5}{6}$, on dit X = 5, quand r tombe entre $\frac{5}{6}$ et $\frac{6}{6}$, on dit X = 6.



Ces règles sont arbitraires : on aurait pu décider que les 6 intervalles $\left(0,\frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right)$, … $\left(\frac{5}{6},\frac{6}{6}\right)$ correspondent aux valeurs (5, 3, 1, 2, 4, 6).

On peut alors simuler à toute vitesse autant de jets que l'on veut.
Si les trois premiers r tirés sont 0.56, 0.19 et 0.59 :

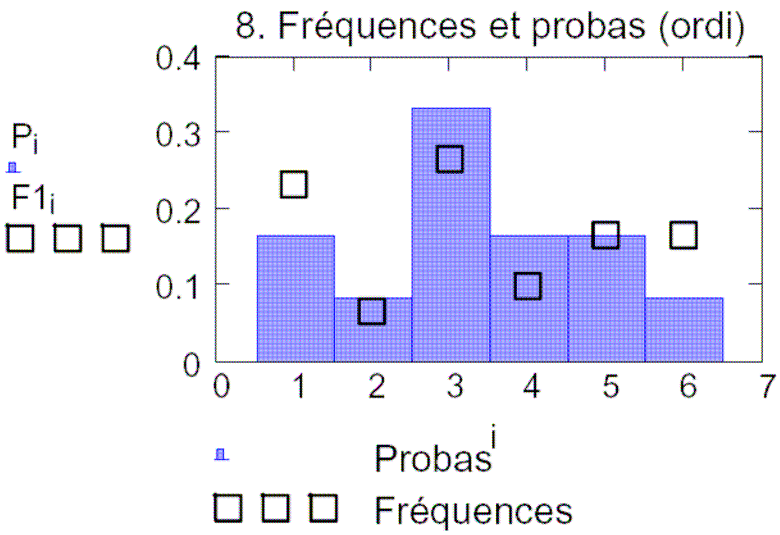


Après 3 jets, le vecteur F1 des fréquences est F/3 : F1 = (0 0.333 0 0.666 0 0).

On rappelle le vecteur P des probabilités pour un dé équilibré :
P^T = (0.167 0.167 0.167 0.167 0.167 0.167)

$n := 30$

$F1 := FSim(P, n)$ FSim est le programme donnant le vecteur F1 des fréquences pour n jets simulés.



Exercice

On veut jouer à pierre-papier-ciseaux en choisissant chaque stratégie de façon aléatoire, avec des probabilités 0.2 pour pierre, 0.5 pour papier et 0.3 pour ciseaux.

1) Donner le découpage du segment $(0,1)$ qui permettra de décider pour chaque r obtenu la stratégie choisie.
2) Utiliser les nombres r = 0.89, r = 0.12 pour simuler deux jeux.

<u>III) Complément sur la génération des nombres aléatoires r uniformément distribués sur</u> $(0,1)$.

rnd(1) = 0.141

Comment l'ordinateur fait-il pour obtenir ces nombres ?

Il engendre une suite (x_n) où x_n est définie par une fonction très simple de x_{n-1} (processus itératif) – la règle, la fonction, qui donne x_n en fonction de x_{n-1} est telle que les nombres ont *l'air aléatoires* (nombres pseudo-aléatoires)

<u>Règle</u>

Pour a = 2, c = 3, m = 5, des entiers donnés et une valeur initiale x_1 = 5, on définit x_k = mod(x_{k-1} x a + c, m) = reste de la division euclidienne de x_{k-1} x a + c par m.

Donc les x_k sont nécessairement entre 0 et m –1, si on les divise par m, on obtient des nombres entre 0 et 1 : 0, $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$, …, $\frac{m-1}{m}$.

Voyons ici avec x_1 = 5, km = 100, k = 2 jusqu'à km, x_k = mod(x_{k-1} x a + c, m), x_1 x 2+ 3=13, regardons les 4 premiers x_k : x_1 = 5, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 1.

k = 1 .. 12

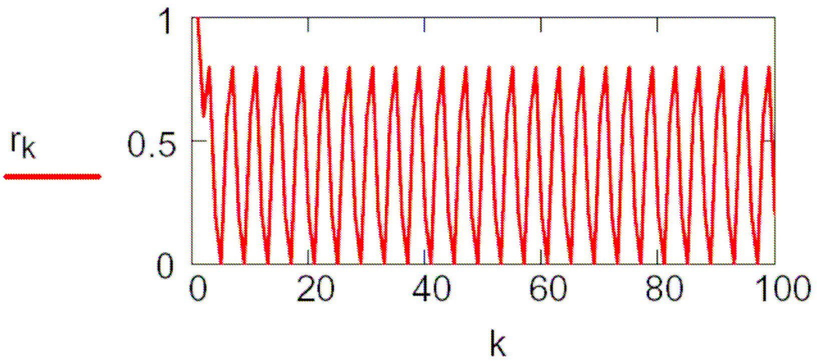
$x_k =$

5
3
4
1
0
3
4
1
0
3
4
1

$\frac{x_k}{m} =$

1
0.6
0.8
0.2
0
0.6
0.8
0.2
0
0.6
0.8
0.2

$$r := \frac{x}{m} \qquad\qquad k := 1 .. km$$



Série régulière -

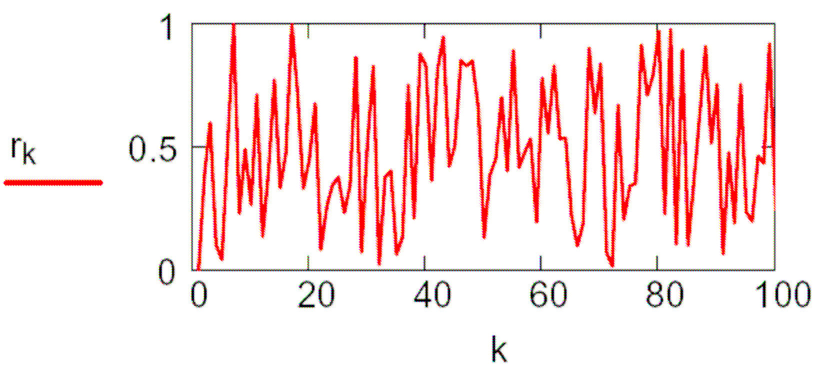
Avec

$$a := 256 \qquad c := 12994 \qquad m := 5996$$

$$k := 2 .. km$$

$$x_k := \mathrm{mod}\left(x_{k-1} \cdot a + c , m\right)$$

$$r := \frac{x}{m} \qquad\qquad k := 1 .. km$$



Série "pseudo-aléatoire": les nombres "ont l'air" aléatoires.

Fin de l’extrait du cours de l’UPPA : Professeur : Marc Artzrouni

Fin