



## Différence entre la convergence uniforme et simple

# 1 Convergence simple

## 1.1 Définition

Soit  $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications.

1. Soit  $f \in E^X$ . On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement vers  $f$  sur  $X$**  si et seulement si, **pour tout  $x$  de  $X$ , la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(x)$  dans  $E$** . On dit que  $f$  est **la limite simple** de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Cela se traduit par :

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)$$

2. On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement sur  $X$**  si et seulement s'il existe  $f : X \rightarrow E$  **tel que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $X$** .

**Remarque :** On note :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.S.} f \text{ sur } X$$

pour exprimer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $X$ .

**Remarque :** Il y a unicité de la limite simple.

## 1.2 Définition

Pour  $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée, on appelle **ensemble ou domaine de convergence de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$**  l'ensemble des  $x$  de  $X$  tels que  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

## 1.3 Exemple

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3x^2}$$

Voir la partie méthodologie pour la démonstration de la convergence simple.

# 2 Convergence uniforme

## 2.1 Définition

Soit  $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications.

1. Soit  $f : X \rightarrow E$ . On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge uniformément** vers  $f$  sur  $X$  si et seulement si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X (n > N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon)}$$

On dit alors que  $f$  est **la limite uniforme** de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

2. On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge uniformément sur  $X$**  si et seulement s'il existe  $f : X \rightarrow E$  telle que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

**Remarque :** On note

$$\boxed{f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C.U.} f \text{ sur } X}$$

pour exprimer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$ .

**Remarque :** On montre sans difficulté que :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.U.} f \text{ sur } X \\ g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.U.} g \text{ sur } X \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda f_n + g_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{C.U.} \lambda f + g \text{ sur } X}$$

**Proposition :** Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$  alors  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $X$ .

**Proposition :** Soient  $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications et  $f \in E^X$ . Pour que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$ , il faut et il suffit que :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \bullet \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall n > N, f_n - f \text{ soit bornée,} \\ \bullet \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{array} \right.}$$

**Remarque** On rappelle qu'avec les hypothèses de la proposition, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\|$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme de  $E$ .

**Théorème CNS de Cauchy de convergence uniforme :** Soit  $(f_n : X \rightarrow E)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications, pour que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$ , il faut et il suffit que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \forall x \in X \quad \left( \left\{ \begin{array}{l} p > N \\ q > N \end{array} \right\} \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon \right)}$$

## 2.2 Exemple

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$$

Voir la partie méthodologie pour la démonstration de la convergence uniforme.

## 3 Méthodologie

Montrons que la suite de fonctions  $f_n$  définies par  $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$  converge simplement puis uniformément.

### 3.1 Montrons que cette suite de fonctions converge simplement

Pour déterminer si une suite de fonctions converge simplement on calcule :

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

- Si  $x = 0$  alors  $f_n(0) = 0$
- Si  $x \neq 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1 + n^3 x^2} = 0 = g(x)$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers la fonction nulle  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.2 Montrons que cette suite de fonctions converge uniformément vers $g$

Il faut montrer que  $x \mapsto f_n(x) - g(x)$  est bornée et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = 0$ .

#### 3.2.1 Montrons que $x \mapsto f_n(x) - g(x)$ est bornée

On pose une fonction  $h$  définie par  $h(x) = f_n(x) - g(x)$

$$h(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$$

On calcule  $h'(x)$  pour étudier les variations de  $h$ .

$$h'(x) = n \frac{1 - n^3 x^2}{(1 + n^3 x^2)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{n^3}$$

$h$  est décroissante sur  $] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}; +\infty[$ .

$h$  est croissante sur  $[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}; \frac{1}{\sqrt{n^3}}]$ .

Ainsi on détermine  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$ .

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| = h\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Donc  $x \mapsto f_n(x) - f(x)$  est bornée par 1.

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| = 0$$

On a ainsi démontré que  $x \mapsto f_n(x) - g(x)$  est bornée et que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = 0$ .

Donc  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

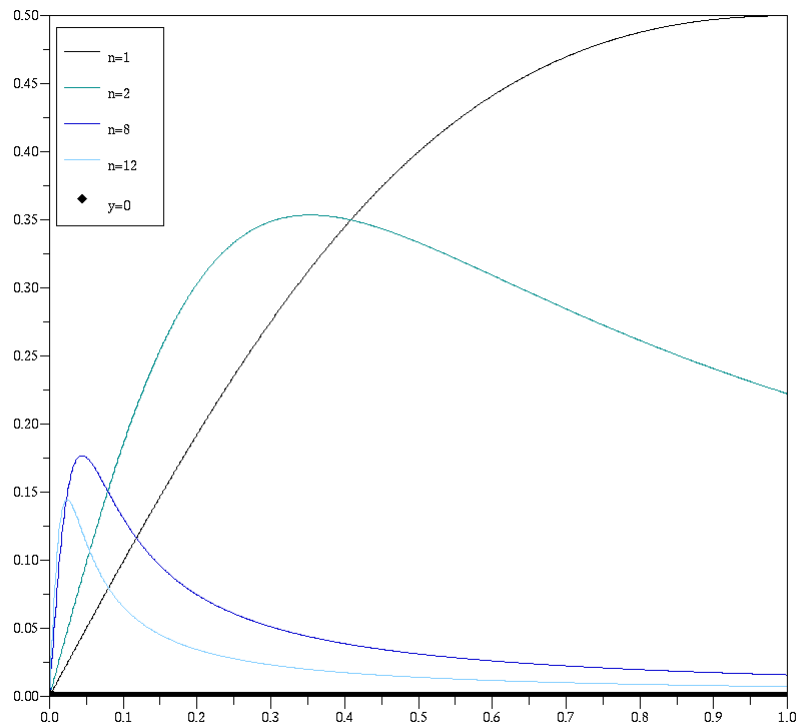


FIG. 1 – Représentation des fonctions  $f_n$  définies par  $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}$ .

## 4 Différence

Nous allons montrer à l'aide de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  qu'une suite de fonctions peut converger simplement mais pas uniformément.

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi + n^2 x^2}{1 + n^2 x}\right)$$

### 4.1 Convergence simple

$$\begin{aligned} - x \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \sin(x) \\ - x = 0 \quad f_n(0) &= \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

Donc  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers  $f$  telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### 4.2 Convergence uniforme

On pose  $x_n = \frac{1}{n^2}$  pour  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &\geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \\ f_n(x_n) - f(x_n) &= \sin\left(\frac{\pi + \frac{1}{n^2}}{2}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ f_n(x_n) - f(x_n) &= \cos\left(\frac{1}{2n^2}\right) - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| &= 1 \end{aligned}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$ .

Donc  $(f_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas uniformément vers  $f$ .

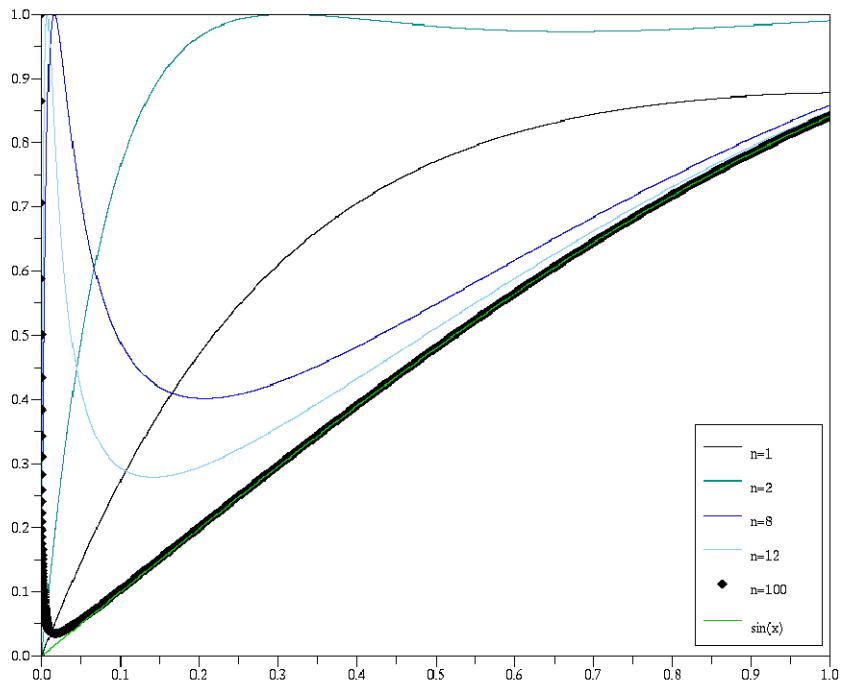


FIG. 2 – Représentation des fonctions  $f_n$  définies par  $f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi + n^2 x^2}{1 + n^2 x}\right)$ .