

Aucun document autorisé - calculatrice UPPA autorisée
 Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
 et feuille de papier millimétré fournies

Durée : 2 heures

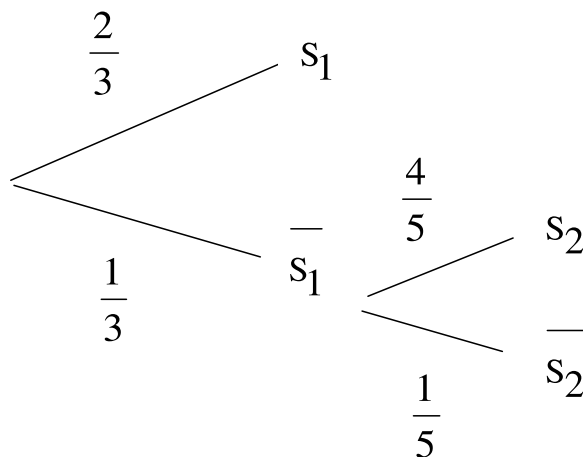
Correction du Devoir Surveillé 2 en Probabilités

Exercice 1 :

Pour $i = 1, 2$, on note S_i l'événement : "le joueur réussit le service n°i".

On a $P(S_1) = \frac{2}{3}$ et $P_{\overline{S_1}}(S_2) = \frac{4}{5}$.

On peut schématiser la situation à l'aide de l'arbre ci-dessous.



$$1) \ a) \ P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = P(\overline{S_1}) \times P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

b) On note R l'événement : "la mise en jeu est réussie". On a $R = \overline{\overline{S_1} \cap \overline{S_2}}$.
 Donc $P(R) = 1 - P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = \frac{14}{15}$

2) a) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{14}{15}$ car il s'agit d'une succession de 10 épreuves indépendantes les unes des autres, chacune donnant lieu à deux éventualités, avec une probabilité de succès $p = \frac{14}{15}$.

Pour $0 \leq k \leq 10$, on a $P(X = k) = C_{10}^k \left(\frac{14}{15}\right)^k \left(\frac{1}{15}\right)^{10-k}$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) = C_{10}^9 \left(\frac{14}{15}\right)^9 \left(\frac{1}{15}\right) + C_{10}^{10} \left(\frac{14}{15}\right)^{10} \\ &\Leftrightarrow P(X \geq 9) = 0.860. \end{aligned}$$

$$\text{c) } E(X) = np = \frac{28}{3} = 9.333 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{\frac{28}{45}} = 0.789.$$

Exercice 2 :

X suit une loi normale de paramètres μ et σ .

On centre et on réduit, c'est-à-dire, on pose $T = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Ainsi, T suit une loi normale centrée réduite.

$$\text{On a } P(X \leq 20) = \frac{250}{400} = 0.625 \text{ et } P(X \geq 12) = \frac{380}{400} = 0.95$$

$$1) \text{ On a : } P(X \leq 20) = 0.625 \Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{20 - \mu}{\sigma}\right) = 0.625$$

Or, d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$P(T \leq 0.32) = 0.625. \text{ D'où : } \frac{20 - \mu}{\sigma} = 0.32.$$

$$\text{D'autre part, } P(X \geq 12) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(T \geq \frac{12 - \mu}{\sigma}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(T \leq \frac{12 - \mu}{\sigma}\right) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{\mu - 12}{\sigma}\right) = 0.95$$

Or, d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,

$$P(T \leq 1.65) = 0.95. \text{ D'où : } \frac{\mu - 12}{\sigma} = 1.65.$$

$$\text{On obtient le système suivant : } \begin{cases} \frac{20 - \mu}{\sigma} = 0.32 \\ \frac{\mu - 12}{\sigma} = 1.65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 20 - 0.32\sigma \\ \frac{8}{\sigma} - 0.32 = 1.65 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 18.7 \\ \sigma = 4.06 \end{cases}$$

$$2) P(X \geq 18) = P(T \geq -0.17) = 1 - P(T \leq -0.17) = 1 - (1 - P(T \leq 0.17)) = P(T \leq 0.17) = 0.5675, \text{ d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}$$

Le pourcentage de carottes pesant plus de 18 grammes est 56,75 %.

$$3) P_{(X \geq 15)}(X \leq 18) = \frac{P((X \geq 15) \cap (X \leq 18))}{P(X \geq 15)} = \frac{P(15 \leq X \leq 18)}{P(X \geq 15)}.$$

$$P(15 \leq X \leq 18) = P(-0.91 \leq T \leq -0.17) = P(T \leq -0.17) -$$

$$P(T \leq -0.91) = 1 - P(T \leq 0.17) - (1 - P(T \leq 0.91)) = -0.5675 + 0.8186 = 0.2511, \text{ d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}$$

De plus, $P(X \geq 15) = P(T \geq -0.91) = 1 - P(T \leq -0.91) = 1 - (1 - P(T \leq 0.91)) = 0.8186, \text{ d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}$

$$\text{Ainsi, } P_{(X \geq 15)}(X \leq 18) = \frac{0.2511}{0.8186} = 0.307.$$

La probabilité qu'une carotte pèse moins de 18 grammes sachant qu'elle pèse plus de 15 grammes est 0.307.

Exercice 3 :

On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'emplacements retenus et occupés. X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0.85$. On a $q = 1 - p = 0.15$.

Comme $n \geq 150$, $np \geq 127.5 \geq 15$ et $nq > 22.5 > 5$, on peut approximer X par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale de paramètres $\mu = np = 0.85n$ et $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{0.1275n}$.

On centre et on réduit c'est-à-dire, on pose $T = \frac{Y - 0.85n}{\sqrt{0.1275n}}$. Ainsi, T suit une loi normale centrée réduite.

1) On cherche n pour que $P(X \leq 150) \geq 0.95$.

$$P(X \leq 150) \geq 0.95 \Leftrightarrow P(Y \leq 150) \geq 0.95 \Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{150 - 0.85n}{\sqrt{0.1275n}}\right) \geq 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{150 - 0.85n}{\sqrt{0.1275n}}\right) \geq P(T \leq 1.65).$$

$$\text{Donc } \frac{150 - 0.85n}{\sqrt{0.1275n}} \geq 1.65 \Leftrightarrow -0.85n - 1.65\sqrt{0.1275n} + 150 \geq 0.$$

On pose $N = \sqrt{n}$.

On doit résoudre l'inégalité $-0.85N^2 - 1.65\sqrt{0.1275}N + 150 \geq 0$. On trouve un discriminant $\Delta \simeq 510,35$ et comme racines $N_1 \simeq -13.63$ et $N_2 \simeq 12.94$. La solution de l'inéquation est $[0, N_2]$. Donc $n \in [0, N_2^2] \Rightarrow n \in [0, 167.4]$. On prend comme valeur de n , 167.

Le nombre maximum de réservations que le gérant peut accepter pour qu'il puisse loger tout le monde avec une probabilité supérieure à 0.95 est 167.

2) Ici, $n = 155$, $np = 131.75$ et $npq = 19.7625$. Comme $n \geq 150$, $np \geq 15$ et $nq > 5$, on peut approximer X par une variable aléatoire Z qui suit une loi normale de paramètres $\mu = 131.75$ et $\sigma = 4.44$.

On centre et on réduit c'est-à-dire, on pose $U = \frac{Z - 131.75}{4.44}$. Ainsi, U suit une loi normale centrée réduite.

On cherche $P(X \leq 120)$. On a $P(X \leq 120) \simeq P(Z \leq 120)$.

$$P(Z \leq 120) = P(U \leq -2.65) = 1 - P(U \leq 2.65) = 1 - 0.996 = 0.004.$$

La probabilité pour que le seuil de confort de 120 tentes ne soit pas dépassé lorsque le gérant retient 155 réservations est 0.004.

Exercice 4 :

$$k \text{ un réel positif ou nul et } f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } |x| \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Comme f est une fonction de densité de probabilité, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-k}^k x + 1 dx = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-k}^k = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{2} + k - \frac{k^2}{2} + k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Si $x \leq -\frac{1}{2}$, alors $F_X(x) = 0$.

Si $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^x f(t) dt = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-\frac{1}{2}}^x = \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{8}$.

Si $x \geq \frac{1}{2}$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) dt = 1$.

$$\text{Ainsi, } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{8} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

3) $T = 1 + X^2$.

a) Soit F_T la fonction de répartition de T .

Pour $t \in \mathbb{R}$, $F_T(t) = P(T \leq t) = P(1 + X^2 \leq t) = P(X^2 \leq t - 1)$.

Si $t - 1 < 0$, $F_T(t) = 0$.

Si $t - 1 \geq 0$, $F_T(t) = P(-\sqrt{t-1} \leq X \leq \sqrt{t-1}) = \int_{-\sqrt{t-1}}^{\sqrt{t-1}} f(x) dx =$

$F_X(\sqrt{t-1}) - F_X(-\sqrt{t-1})$.

Si $-\sqrt{t-1} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{t-1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \leq \frac{5}{4}$, alors $F_T(t) = \frac{(\sqrt{t-1})^2}{2} +$

$\sqrt{t-1} + \frac{3}{8} - \left(\frac{(-\sqrt{t-1})^2}{2} - \sqrt{t-1} + \frac{3}{8}\right) = 2\sqrt{t-1}$.

Si $-\sqrt{t-1} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{t-1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow t \geq \frac{5}{4}$, alors $F_T(t) = 1 - 0 = 1$.

$$\text{Ainsi, } F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ 2\sqrt{t-1} & \text{si } 1 \leq t \leq \frac{5}{4} \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$

Comme la fonction de densité de probabilité g de T est la dérivée de F_T ,

$$\text{on a : } g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t-1}} & \text{si } 1 \leq t \leq \frac{5}{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b) $E(T) = 1 + E(X^2)$.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^3 + x^2 dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \text{ car } x \mapsto x^3 \text{ est}$$

impair et $x \mapsto x^2$ est pair. Donc $E(X^2) = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}$.

D'où $E(T) = \frac{13}{12}$.

D'autre part, $V(T) = E(T^2) - (E(T))^2$.

$$\text{On a } E(T^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x) dx = \int_1^{\frac{5}{4}} \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx = \int_1^{\frac{5}{4}} \frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx =$$

$$\int_1^{\frac{5}{4}} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}} dx + \int_1^{\frac{5}{4}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{x-1}(x+1) dx + 1 =$$

$$\int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{x-1} dx + \int_1^{\frac{5}{4}} x\sqrt{x-1} dx + 1 = \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^{\frac{5}{4}} + \int_1^{\frac{5}{4}} x\sqrt{x-1} dx + 1 =$$

$$\frac{2}{3} \frac{1}{2} + 1 + \int_1^{\frac{5}{4}} x\sqrt{x-1} dx = \frac{13}{12} + \int_1^{\frac{5}{4}} x\sqrt{x-1} dx.$$

Pour calculer $\int_1^{\frac{5}{4}} x\sqrt{x-1} dx$, on utilise une intégration par parties.

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \int_1^{\frac{5}{4}} x\sqrt{x-1} dx = \frac{2}{3} [x(x-1)^{\frac{3}{2}}]_1^{\frac{5}{4}} - \frac{2}{3} \int_1^{\frac{5}{4}} (x-1)^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$\frac{2}{3} \frac{5}{4} \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{2}{5} [(x-1)^{\frac{5}{2}}]_1^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{48} - \frac{2}{3} \frac{1}{5} \frac{1}{2} = \frac{5}{48} - \frac{1}{120} = \frac{23}{240}.$$

D'où $E(T^2) = \frac{23}{240} + \frac{13}{12} = \frac{283}{240}$, $V(T) = \frac{283}{240} - \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{1}{180}$ et

$$\sigma(T) = \frac{\sqrt{5}}{30}.$$

Exercice 5 :

1) On résume les données dans le tableau ci-dessous :

Durée	[10, 20[[20, 30[[30, 40[[40, 50[[50, 60[[60, 70[[70, 80[Total
Effectif	2	5	15	7	3	2	1	35
Fréquence : F_i	0.057	0.143	0.429	0.2	0.086	0.057	0.028	1
$\frac{F_i}{10}$	0.0057	0.0143	0.0429	0.02	0.0086	0.0057	0.0028	0.1

Comme la largeur de chaque intervalle vaut 10, pour avoir une aire totale égale à 1, il faut diviser chaque fréquence par 10.

Le schéma se trouve en dernière page.

2) Effectif total : $n = 2 + 5 + 15 + 7 + 3 + 2 + 1 = 35$.

$$SD = \sum X_D = 2 \times 15 + 5 \times 25 + 15 \times 35 + 7 \times 45 + 3 \times 55 + 2 \times 65 + 75 = 1365.$$

$$S2D = \sum (X_D)^2 = 2 \times 15^2 + 5 \times 25^2 + 15 \times 35^2 + 7 \times 45^2 + 3 \times 55^2 + 2 \times 65^2 + 75^2 = 59275.$$

$$3) \mu_e = \frac{\sum X_D}{n} \text{ et } \sigma_e = \sqrt{\frac{\sum (X_D)^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} (\mu_e)^2}.$$

$$\text{On trouve } \mu_e = \frac{1324}{35} = 37.83 \text{ et } \sigma_e = \sqrt{\frac{55966}{34} - \frac{35}{34} (37.83)^2} = 13.15.$$

4) On utilise la fonction de densité de probabilité $dnorm(\cdot, \mu_e, \sigma_e)$ définie par :

$$dnorm(x, \mu_e, \sigma_e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_e} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_e}{\sigma_e} \right)^2}.$$

On trouve les valeurs suivantes : $dnorm(10, \mu_e, \sigma_e) = 0.003$

$$dnorm(20, \mu_e, \sigma_e) = 0.012, \quad dnorm(30, \mu_e, \sigma_e) = 0.025,$$

$$dnorm(\mu_e, \mu_e, \sigma_e) = 0.03, \quad dnorm(50, \mu_e, \sigma_e) = 0.02, \quad dnorm(60, \mu_e, \sigma_e) = 0.007,$$

$$dnorm(80, \mu_e, \sigma_e) = 0.0002.$$

Le schéma se trouve en dernière page.

5) X_D suit une loi normale de paramètres $\mu = 37.83$ et $\sigma = 13.15$.

On centre et on réduit, c'est-à-dire, on pose $T = \frac{X_D - 37.83}{13.15}$. Ainsi, T suit une loi normale centrée réduite.

$$P(30 \leq X_D \leq 75) = P(-0.60 \leq T \leq 2.83) = P(T \leq 2.83) -$$

$$P(T \leq -0.60) = 0.9977 - (1 - P(T \leq 0.60)) = 0.9977 - 1 + 0.7257 = 0.7234,$$

d'après la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La probabilité qu'un élève ait une durée de trajet comprise entre 30 et 75 minutes est 0.7234.

