

Correction du Devoir Surveillé 1 en Probabilités

Exercice 1 :

p, k, n sont trois entiers naturels tels que $0 < p < k < n$.

$$1) \text{ On a } C_n^k C_k^p = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{p!(k-p)!} = \frac{n!}{p!(k-p)!(n-k)!}$$

$$\text{De plus, } C_n^p C_{n-p}^{n-k} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{(n-p)!}{(n-k)!(k-p)!} = \frac{n!}{p!(k-p)!(n-k)!}$$

$$\text{Donc } C_n^k C_k^p = C_n^p C_{n-p}^{n-k}$$

$$2) \text{ a) } S_1 = \sum_{p=0}^k C_n^p C_{n-p}^{n-k} = \sum_{p=0}^k C_n^k C_k^p = C_n^k \sum_{p=0}^k C_k^p = C_n^k \sum_{p=0}^k C_k^p 1^p 1^{k-p}$$

$$S_1 = C_n^k (1+1)^k = C_n^k 2^k \text{ (formule du binôme de Newton).}$$

$$\text{b) } S_2 = \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} C_n^k C_k^p = \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} C_n^p C_{n-p}^{n-k}$$

$$S_2 = C_n^p \sum_{k=p}^n (-1)^{n-k} C_{n-p}^{n-k} = C_n^p \sum_{j=0}^{n-p} (-1)^j C_{n-p}^j = C_n^p \sum_{j=0}^{n-p} C_{n-p}^j (-1)^j 1^{n-p-j}$$

$$S_2 = C_n^p (-1+1)^{n-p} = 0 \text{ (formule du binôme de Newton).}$$

Exercice 2 :

On note M l'événement : "l'individu est malade" et V l'événement : "l'individu est vacciné".

On a : $P_M(V) = \frac{1}{5}$, $P_M(\bar{V}) = \frac{4}{5}$, $P_V(M) = \frac{1}{12}$ et $P(V) = \frac{1}{4}$.

1) On cherche $P_{\bar{V}}(M)$.

$$\text{On a } P_{\bar{V}}(M) = \frac{P(\bar{V} \cap M)}{P(\bar{V})}$$

On a : $P(M) = P(\bar{V} \cap M) + P(V \cap M)$ car $((V \cap M), (\bar{V} \cap M))$ est un système complet d'événements.

$$\text{De plus, } P(V \cap M) = P_V(M) \times P(V) = \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}.$$

$$\text{D'autre part, } P(\bar{V} \cap M) = P_M(\bar{V}) \times P(M) = \frac{4}{5} \times P(M).$$

$$\text{Donc, } P(M) = \frac{1}{48} + \frac{4}{5} \times P(M) \Leftrightarrow \frac{1}{5}P(M) = \frac{1}{48} \Leftrightarrow P(M) = \frac{5}{48}.$$

$$\text{D'où, } P(\bar{V} \cap M) = \frac{5}{48} - \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Ainsi, } P_{\bar{V}}(M) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{9}.$$

$$2) \text{ On a } P_V(M) = \frac{1}{12} \text{ et } P_{\bar{V}}(M) = \frac{1}{9}.$$

Ainsi, $P_V(M) < P_{\bar{V}}(M)$.

Donc, on peut considérer que le vaccin est efficace.

Exercice 3 :

1) On peut les ranger de $10! = 3\,628\,800$ façons.

2) On a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes.

a) Il y a $C_{10}^5 = 252$ façons de ranger les 5 billes rouges parmi les 10 places, $C_5^3 = 10$ façons de ranger les 3 billes vertes parmi les 5 places inoccupées et $C_2^2 = 1$ façon de ranger les 2 billes blanches parmi les 2 places restantes. On trouve $C_{10}^5 \times C_5^3 \times C_2^2 = 2\,520$.

On obtient le même résultat en plaçant d'abord les billes blanches puis les rouges puis les vertes : $C_{10}^2 \times C_8^5 \times C_3^3 = 2\,520$ ou en plaçant d'abord

b) Il y a 6 façons de ranger les billes par couleur : $RBV, RVB, VRB, VBR, BRV,$

BVR . Il y a $C_5^5 = 1$ façon de ranger les 5 billes rouges parmi les 5 places réservées à celles-ci, $C_2^2 = 1$ façon de ranger les 2 billes blanches parmi les 2 places réservées à celles-ci et $C_3^3 = 1$ façon de ranger les 3 billes vertes parmi les 3 places réservées à celles-ci. On trouve $6 \times C_5^5 \times C_2^2 \times C_3^3 = 6$ façons de ranger les billes si on veut qu'elles soient regroupées par couleur.

c) Il y a 6 façons de regrouper les billes rouges (\square représente la place d'une bille) : $RRRRR\square\square\square\square\square, \square RRRRR\square\square\square\square, \square\square RRRRR\square\square, \square\square\square RRRRR\square, \square\square\square\square RRRR\square, \square\square\square\square\square RRRR$

□□□□ RRRRR□, □□□□□ RRRRR.

Il y a $C_5^2 = 10$ façons de ranger les 2 billes blanches parmi les 5 places inoccupées et $C_3^3 = 1$ façon de ranger les 3 billes vertes parmi les 3 places restantes.

On doit enlever les 5 cas où les billes vertes ou blanches sont regroupées : $VVBBV, VBBVV, BBVVV, VVVBB, BVVVV$.

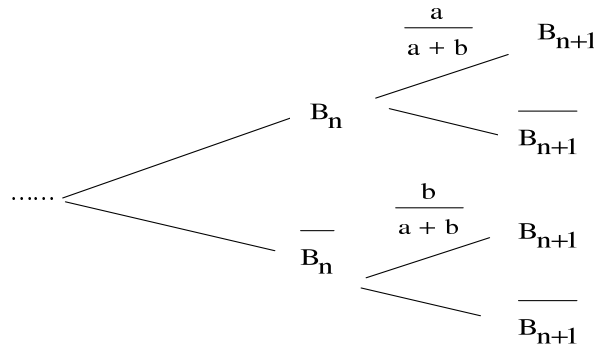
Il y a $6 \times (C_5^2 \times C_3^3 - 5) = 30$ de ranger les billes si on veut que seules les rouges soient groupées.

Exercice 4 :

U_n est l'événement : "le n -ième tirage s'effectue dans l'urne U ", V_n l'événement : "le n -ième tirage s'effectue dans l'urne V " et B_n l'événement : "la n -ième boule est blanche";

$$P_{U_n}(B_n) = \frac{a}{a+b}, P_{V_n}(B_n) = \frac{b}{a+b} \text{ et } p_n = P(B_n).$$

1) a) On schématise le passage de l'étape n à l'étape $n+1$ avec l'arbre ci-dessous :



On a $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{a}{a+b}$ et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{b}{a+b}$.

b) On a $p_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} \cap B_n) + P(B_{n+1} \cap \overline{B_n})$ car

$(B_{n+1} \cap B_n), (B_{n+1} \cap \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.

$$p_{n+1} = P_{B_n}(B_{n+1}) \times P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) \times P(\overline{B_n})$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} = \frac{a}{a+b} \times p_n + \frac{b}{a+b}(1 - p_n) = p_n \left(\frac{a-b}{a+b} \right) + \frac{b}{a+b}.$$

c) $w_n = p_n - \frac{1}{2}$.

$$w_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = p_n \left(\frac{a-b}{a+b} \right) + \frac{b}{a+b} - \frac{1}{2} = p_n \left(\frac{a-b}{a+b} \right) + \frac{1}{2} \frac{b-a}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow w_{n+1} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \left(p_n - \frac{1}{2}\right) = w_n \left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

Donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = \frac{a-b}{a+b}$.

d) On a $w_n = w_1 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}$ avec $w_1 = p_1 - \frac{1}{2} = \frac{a}{a+b} - \frac{1}{2} = \frac{a-b}{2(a+b)}$.

Donc, $w_n = \frac{a-b}{2(a+b)} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1}$.

D'où, $p_n = \frac{a-b}{2(a+b)} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{n-1} = 0$ car $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| < 1$. Ainsi $l = \frac{1}{2}$.

2) a) On a $P(U_{n+1}) = P(U_n \cap B_n) + P(V_n \cap \overline{B_n})$ car $((U_n \cap B_n), (V_n \cap \overline{B_n}))$ est un système complet d'événements.

Donc, $P(U_{n+1}) = P_{U_n}(B_n) \times P(U_n) + P_{V_n}(\overline{B_n}) \times P(V_n)$

$\Leftrightarrow P(U_{n+1}) = \frac{a}{a+b} P(U_n) + \frac{a}{a+b} P(V_n) = \frac{a}{a+b} (P(U_n) + P(V_n)) = \frac{a}{a+b}$.

b) On en déduit $P(U_n) = \frac{a}{a+b}$.

c) On a $p_n = P(B_n) = P(U_n \cap B_n) + P(V_n \cap B_n)$ car $((U_n \cap B_n), (V_n \cap B_n))$ est un système complet d'événements.

$p_n = P_{U_n}(B_n) \times P(U_n) + P_{V_n}(B_n) \times P(V_n)$

$\Leftrightarrow p_n = \frac{a}{a+b} \times \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \times \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2}$.

3) a) $\frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} - \frac{1}{2} = \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{2(a+b)^2} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)^2}$.

Donc $\frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{2}$.

b) La meilleure méthode est la deuxième.

Exercice 5 :

a et b sont deux réels strictement positifs et f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ab}{a+b} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ \frac{ab}{a+b} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1) La fonction f est positive sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* comme fonction exponentielle. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{ab}{a+b} = f(0)$. Donc f est continue en 0, donc finalement sur \mathbb{R} .

$$\text{D'autre part, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{ab}{a+b} e^{ax} dx + \int_0^{+\infty} \frac{ab}{a+b} e^{-bx} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{b}{a+b} [e^{ax}]_{-\infty}^0 - \frac{a}{a+b} [e^{-bx}]_0^{+\infty} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1.$$

Donc f peut être la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

2) $Y = |X|$.

a) Soit $y \in \mathbb{R}^+$.

$$P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = P(X \leq y) - P(X \leq -y)$$

$$\Leftrightarrow P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y f(x) dx - \int_{-\infty}^{-y} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^0 \frac{ab}{a+b} e^{ax} dx + \int_0^y \frac{ab}{a+b} e^{-bx} dx - \int_{-\infty}^{-y} \frac{ab}{a+b} e^{ax} dx$$

$$\Leftrightarrow P(Y \leq y) = \frac{b}{a+b} [e^{ax}]_{-\infty}^0 - \frac{a}{a+b} [e^{-bx}]_0^y - \frac{b}{a+b} [e^{ax}]_{-\infty}^{-y}$$

$$\Leftrightarrow P(Y \leq y) = \frac{b}{a+b} - \frac{a}{a+b} e^{-by} + \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} e^{-ay} = 1 - \frac{ae^{-by} + be^{-ay}}{a+b}.$$

Si $y \in \mathbb{R}^-$, alors $P(Y \leq y) = 0$.

On note F_Y la fonction de répartition de Y .

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \frac{ae^{-by} + be^{-ay}}{a+b} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

b) On note f_Y la fonction de densité de probabilité de Y . On a : $f_Y = F'_Y$.

Soit $y \in \mathbb{R}^-$. Alors $f_Y(y) = 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}^+$. Alors $f_Y(y) = \frac{abe^{-by} + abe^{-ay}}{a+b} = \frac{ab}{a+b}(e^{-by} + e^{-ay})$.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{ab}{a+b}(e^{-by} + e^{-ay}) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

$$c) E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{ab}{a+b} (e^{-bx} + e^{-ax}) dx.$$

On utilise une intégration par parties.

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-bx} + e^{-ax} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{b}e^{-bx} - \frac{1}{a}e^{-ax} \end{cases}$$

$$\text{Donc } E(Y) = \frac{ab}{a+b} \left(\left[\frac{-x}{b}e^{-bx} - \frac{x}{a}e^{-ax} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{b}e^{-bx} + \frac{1}{a}e^{-ax} dx \right)$$

$$\Leftrightarrow E(Y) = -\frac{ab}{a+b} \left[\frac{1}{b^2}e^{-bx} + \frac{1}{a^2}e^{-ax} \right]_0^{+\infty} = \frac{ab}{a+b} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{ab(a^2 + b^2)}{a^2b^2(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow E(Y) = \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)}.$$

D'après la formule de Huygens-Koenig, $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$.

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Y(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{ab}{a+b} (e^{-bx} + e^{-ax}) dx.$$

On utilise une intégration par parties.

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-bx} + e^{-ax} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{-1}{b}e^{-bx} - \frac{1}{a}e^{-ax} \end{cases}$$

$$\text{Donc } E(Y^2) = \frac{ab}{a+b} \left(\left[\frac{-x^2}{b}e^{-bx} - \frac{x^2}{a}e^{-ax} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x}{b}e^{-bx} + \frac{2x}{a}e^{-ax} dx \right)$$

$$\Leftrightarrow E(Y^2) = \frac{2a}{a+b} \int_0^{+\infty} xe^{-bx} dx + \frac{2b}{a+b} \int_0^{+\infty} xe^{-ax} dx$$

On utilise deux intégrations par parties.

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-bx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{-1}{b}e^{-bx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-ax} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow E(Y^2) = \frac{2a}{a+b} \left(\left[\frac{-x}{b} e^{-bx} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{b} e^{-bx} dx \right) + \frac{2b}{a+b} \left(\left[\frac{-x}{a} e^{-ax} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} e^{-ax} dx \right)$$

$$\Leftrightarrow E(Y^2) = \frac{2a}{a+b} \left[\frac{-1}{b^2} e^{-bx} \right]_0^{+\infty} + \frac{2b}{a+b} \left[\frac{-1}{a^2} e^{-ax} \right]_0^{+\infty} = \frac{2a}{b^2(a+b)} + \frac{2b}{a^2(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow E(Y^2) = \frac{2a^3 + 2b^3}{a^2b^2(a+b)} = \frac{2(a^2 - ab + b^2)(a+b)}{a^2b^2(a+b)} = \frac{2(a^2 - ab + b^2)}{a^2b^2}.$$

$$\text{Donc } V(Y) = \frac{2(a^2 - ab + b^2)}{a^2b^2} - \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2(a+b)^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2)}{a^2b^2(a+b)^2}$$