



Décompositions en éléments simples et applications au calcul intégral.

1 Décompositions en éléments simples

1.1 Généralités

Une décomposition en éléments simples s'effectue sur une fraction rationnelle.

Qu'est-ce-que une fraction rationnelle?

Soient \mathbb{K} un corps et A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. On appelle *fraction rationnelle* sur \mathbb{K} l'élément,

$$\frac{A}{B}.$$

L'ensemble des fractions rationnelles sur un corps \mathbb{K} se note $\mathbb{K}(X)$.

Le but d'une décomposition en éléments simples est d'obtenir une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ (avec $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X]$) sous la forme d'une somme de fractions irréductibles.

Par exemple la décomposition de $F(X) = \frac{1}{(X-1)^2(X+2)}$ sera de la forme

$$F(X) = \frac{a_1}{(X-1)^2} + \frac{a_2}{(X-1)} + \frac{a_3}{(X+2)} \text{ avec } (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^3.$$

1.2 Détermination du degré, partie entière

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle.

L'entier relatif $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$ est appelé *degré de F* .

Tout élément F de $\mathbb{K}(X)$ s'écrit de manière unique $F = P + G$, où P est un polynôme, et G est une fraction rationnelle de degré strictement négatif.

On dit que P est la *partie entière* de la fraction rationnelle F .

1.3 Pôles simples et multiples

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle non nulle écrite sous forme irréductible.

Soit α un élément de \mathbb{K} et m dans \mathbb{N}^* . On dit que α est un pôle de F , avec la multiplicité m , si α est une racine du polynôme B avec la multiplicité m .

α est un pôle de F avec la multiplicité $m \Leftrightarrow F = \frac{A}{(X-\alpha)^m Q}$, avec $\begin{cases} A(\alpha) \neq 0 \\ Q(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

- On parle de pôle simple si $m = 1$, et de pôle multiple si $m > 1$.

1.3.1 Cas d'un pôle simple

Soit F un élément de $\mathbb{K}(X)$ admettant α comme pôle simple.

Il existe λ tel que

$$F = \frac{\lambda}{(X-\alpha)} + G$$

où α n'est pas un pôle de G .

On peut calculer le coefficient λ de différentes façons :

- Posons $F = \frac{A}{(X - \alpha)Q}$, avec $A(\alpha) \neq 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Alors $\lambda = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

- On peut écrire aussi : $\lambda = \lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha)^m F(x)$

1.3.2 Cas d'un pôle multiple

Soit F un élément de $\mathbb{K}(X)$ admettant α comme pôle avec la multiplicité $m > 1$.

Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ dans \mathbb{K} tels que

$$F = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{(X - \alpha)^k} + G$$

où α n'est pas un pôle de G .

On peut facilement calculer le coefficient λ_m :

- Posons $F = \frac{A}{(X - \alpha)^m Q}$, avec $A(\alpha) \neq 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Alors $\lambda_m = \frac{A(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

- On peut aussi écrire $\lambda_m = \lim_{x \rightarrow \alpha} (x - \alpha)F(x)$

1.4 Formes de décompositions

1.4.1 Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle à coefficients réels, sous forme irréductible.

Soit $B = \lambda \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^q (X^2 + b_k X + c_k)^{s_k}$ avec $\Delta < 0$ la factorisation de B dans $\mathbb{R}[X]$. Alors la fraction rationnelle F s'écrit de manière unique :

$$F = E + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^{r_k} \frac{\lambda(k, j)}{(X - \alpha_k)^j} \right) + \sum_{k=1}^q \left(\sum_{j=1}^{s_k} \frac{c_{k,j} X + d_{k,j}}{(X^2 + b_k X + c_k)^j} \right)$$

où E est la partie entière de F et les $\lambda_{k,j}, c_{k,j}, d_{k,j}$ sont des éléments de \mathbb{R} . Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

1.4.2 Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle à coefficient complexes.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les pôles distincts de F , avec les multiplicités r_1, \dots, r_p , alors F s'écrit de manière unique :

$$F = E + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^{r_k} \frac{\lambda(k, j)}{(X - \alpha_k)^j} \right)$$

où E est la partie entière de F et où les $\lambda_{k,j}$ sont des éléments de \mathbb{C} . Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

1.5 Pratique de la décomposition

Les méthodes vues précédemment permettent en principe de former les décompositions en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$.

Néanmoins, un certain nombre de techniques facilitent le travail :

- En diminuant globalement le nombre de coefficients à calculer ;
- En permettant de calculer des coefficients peu facilement "accessibles", à condition cependant qu'il ne reste à ce stade que peu d'inconnues.

Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction à coefficients réels

Soit $F = \frac{A}{B}$ un élément de $\mathbb{R}(X)$.

On peut considérer F comme un élément de $\mathbb{C}(X)$ et la décomposer en tant que telle.

Tout comme F , cette décomposition doit être invariante par conjugaison.

Il en résulte par exemple que la partie entière de F est un polynôme réel. Il en résulte également que les parties polaires (cf paragraphe suivant) sont conjuguées deux à deux.

Plus précisément, si α et $\bar{\alpha}$ sont deux pôles conjugués non réels de F , de multiplicité m , les parties polaires s'écrivent respectivement :

$$\sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{(X - \alpha)^k} \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^m \frac{\bar{\lambda}_k}{(X - \bar{\alpha})^k}.$$

Cette idée permet donc de diminuer de moitié environ le nombre d'inconnues.

Il est également possible d'utiliser la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ d'une fraction rationnelle réelle F pour obtenir sa décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ après regroupement des termes conjugués.

Cette méthode n'est envisageable que si les pôles non réels sont de multiplicité 1.

1.5.1 Utilisation de la parité ou de l'imparité

Si une fraction rationnelle est paire ou impaire, sa décomposition doit aussi l'être.

On exprime cette invariance par les transformations $X \mapsto F(-X)$ ou

$X \mapsto -F(-X)$ et on en déduit des relations sur les coefficients (le nombre d'inconnues diminue environ de moitié).

1.5.2 Utilisation d'une transformation laissant la fraction invariante

Il est possible (même si c'est plus rare qu'avec la parité ou l'imparité) que la fraction rationnelle F soit invariante (ou très simplement modifiée, par exemple changée en son opposée) par une transformation "simple", comme :

$$X \mapsto \lambda - X, \quad X \mapsto \lambda X, \quad X \mapsto \frac{1}{X}, \quad X \mapsto X + \frac{1}{X} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

La décomposition de F doit refléter la même invariance. Exprimer cette invariance donne là encore des relations sur les coefficients inconnus.

1.5.3 Injection de valeurs particulières

Quand il reste peu de coefficients à calculer, il peut être intéressant d'injecter, dans l'égalité entre F et sa décomposition, une ou plusieurs valeurs qui ne soient pas des pôles de F .

Si F est dans $\mathbb{R}(X)$, on peut injecter une valeur complexe comme i (ou j), l'identification donnant alors deux relations entre les coefficients réels inconnus.

1.5.4 Utilisation de la méthode $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x)$

On suppose ici que le degré de F est strictement négatif (la partie entière est donc nulle).

La décomposition de F fait apparaître des termes du type $\frac{\lambda_k}{X - \alpha_k}$ ou $\frac{a_k X + b_k}{X^2 + \beta_k X + \gamma_k}$.

Le calcul de $\lim_{x \rightarrow \infty} xF(x)$ donne alors une relation liant les coefficients λ_k et a_k .

Cette méthode est intéressante quand il ne reste plus que un ou deux coefficients à calculer.

2 Applications au calcul intégral

2.1 Méthode

Lorsque l'on a à calculer une intégrale de la forme $\int_a^b \frac{A}{B} dX$ avec A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$, la méthode à employer (à moins de pouvoir directement calculer la primitive) est de décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ puis de séparer chaque élément de la somme de la décomposition en éléments simples pour pouvoir calculer leur primitive séparément.

2.2 Exemple

$$\text{Soit } I = \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{X^3 + X^2 + X}{X^2 - 1} dX$$

Après décomposition en éléments simples, on a :

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^2 X + 1 + \frac{1}{2(X+1)} + \frac{3}{2(X-1)} dX$$

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^2 X + 1 dX + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{2(X+1)} dX + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{3}{2(X-1)} dX$$

$$I = \left[\frac{1}{2} X^2 + X \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{1}{2} \left[\ln(|X+1|) \right]_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{3}{2} \left[\ln(|X-1|) \right]_{\frac{3}{2}}^2$$

$$I = 2 + 2 - \frac{9}{8} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(5) + \ln(2)) + \frac{3}{2} (\ln(1) - \ln(1) + \ln(2))$$

Finalement,

$$I = \frac{11}{8} + 2 \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(3) - \frac{1}{2} \ln(5)$$