EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

CPI2 - 2007-2008
GESTAS - Brice
GASTEUIL - Alexis

Développements limités, équivalences : application aux intégrales généralisées

1 Définition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une application et x_0 un réel appartenant à I ou une extrémité de I. On dit que f admet un développement limité (en abrégé DL) polynomial à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ et une fonction ε tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

et $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Remarque : Avec les notations ci-dessus, le DL de f peut aussi s'écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + \circ((x - x_0)^n)$$

2 Propriétés

Propriété 1 (Unicité du DL)
Soit f une application admettant un DL d'ordre n en x_0 de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + \circ((x - x_0)^n)$$

Alors les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ sont définis de façon unique.
Le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$$

est appelé la partie principale (ou régulière) du développement limité d'ordre n.
L'unicité du développement limité entraîne la propriété suivante.

Propriété 2 (Parité)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de centre 0 admettant un DL d'ordre n en 0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x)^n$$

- si f est paire, la partie principale est un polynôme pair,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_2 x^2 + ... + a_{2k} x^{2k} + ...$, avec $0 \leq 2k \leq n$
- si f est impaire, la partie principale est un polynôme impair,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_1 x + a_3 x^3 + ... + a_{2k+1} x^{2k+1} + ...$, avec $1 \leq 2k+1 \leq n$

2.1 Troncature de DL et fonctions équivalentes

Propriété 3 (Troncature d'un développement limité)
Supposons que f admette un DL d'ordre n en x_0. Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$. Alors f admet un DL d'ordre p en x_0 obtenu par troncature, c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \circ((x-x_0)^n) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k (x-x_0)^k + \circ((x-x_0)^p)$$

Propriété 4 (DL et fonctions équivalentes)
Soit le développement limité d'ordre n en x_0 de la fonction f,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \circ((x-x_0)^n).$$

On note $I = \{k, a_k \neq 0\}$
- Si $I = \emptyset$, alors f est négligeable devant $(x-x_0)^n$ au voisinage de x_0
- Si $I \neq \emptyset$, alors on note $m = inf(I)$ et on a

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_m (x-x_0)^m \Leftrightarrow f(x) = a_m (x-x_0)^m + \circ((x-x_0)^m).$$

2.2 Continuité, dérivabilité et développements limités

Propriété 5 (Continuité)
Si f admet un DL d'ordre 0 en $x_0, f(x) = a_0 + \circ(1)$, alors f est continue (ou prolongeable par continuité) en x_0 et $f(x_0) = a_0$.

Propriété 6 (Dérivabilité)
Si f admet un DL d'ordre 1 en $x_0, f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \circ(x-x_0)$, alors f (ou son prolongement) est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$.

Remarque : Le fait que f admette un DL d'ordre $n \geq 2$ en x_0 n'implique pas que f soit deux fois dérivable en x_0. Un contre-exemple est donné au point $x_0 = 0$ par l'application $f : x \mapsto x^3 sin(x^{-1})$.

Propriété 7 (Taylor-Young)
Si f est de classe C^n sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si $x_0 \in I$, alors f admet un DL d'ordre n en x_0, qui s'écrit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \circ((x-x_0)^n).$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+\circ((x-x_0)^n)$$

avec $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pour $0\leq k\leq n$.

Propriété 8 (Primitive)
Si f admet un DL d'ordre n en 0 et si F est une primitive de f sur I, alors F admet un DL en 0 d'ordre $n+1$. De plus, si P_n est la partie régulière du DL de f, alors la partie régulière du DL de F est la primitive de P_n qui prend la valeur $F(0)$ en 0,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+\circ(x)^n \Rightarrow F(x)=F(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}+\circ(x^{n+1}).$$

2.3 Développements limités en $+\infty$ ou $-\infty$

Soit $f: I\rightarrow\mathbb{R}$ une application définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). Soit n un entier naturel. On dit que f admet un développement limité (en abrégé DL) d'ordre n en $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe des réels $a_0,a_1,...,a_n$ et une fonction ε tels que

$$\forall x\in I, f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}+\frac{\varepsilon(x)}{x^n}$$

et $\lim\limits_{x\rightarrow+x_0}\varepsilon(x)=0$ avec $x_0=+\infty$ ou $x_0=-\infty$

Le DL peut encore s'écrire $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}+\circ(\frac{1}{x^n})$.

3 Règles de calcul

3.1 Combinaison linéaire

Propriété 9
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre n en 0.
$f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+\circ(x^n)$ et $g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k+\circ(x^n)$

- $f+g$ admet un DL d'ordre n en 0 de la forme : $(f+g)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k+\circ(x^n)$

- $\alpha\ f$ admet un DL d'ordre n en 0 de la forme : $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\alpha a_k x^k+\circ(x^n)$

3.2 Produit de DL

Propriété 10
Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre n en 0.
$f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+\circ(x^n)$ et $g(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k x^k+\circ(x^n)$
fg admet un DL d'ordre n en 0 de la forme :
$(fg)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k+\circ(x^n)$ avec $c_k=\displaystyle\sum_{i+j=k} a_i b_j$

3.3 Composition de DL

Propriété 11
Soient f et g deux fonctions admettant un DL d'ordre n en 0.
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n)$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + \circ(x^n)$.
On note P_n la partie régulière de f et Q_n la partie régulière de g.
Si $a_0 = 0$ alors $g \circ f$ admet un DL d'ordre n en 0 de partie régulière R_n obtenue en ne conservant dans $Q_n \circ P_n$ que les monômes de degré p, $(p \leq n)$.

$$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) = a_1 x + ... + a_n x^n + \circ(x^n)$$

et :

$$g(u) = Q_n(u) + \circ(u^n) = b_0 + b_1 u + ... + b_n u^n + \circ(u^n)$$

Le développement limité à l'ordre n de f^k $(1 \leq k \leq n)$ s'obtient en supprimant dans le polynôme $(a_1 x + ... + a_n x^n)^k$ les termes de degré strictement plus grand que n. Il suffit pour conclure d'appliquer les propriétés 9) et 10) et de remarquer que $\circ[(f(x))^n] = \circ(x^n)$ puisque $a_0 = 0$.

3.4 Inverse de DL

Propriété 12
Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n en 0.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \circ(x^n),$$

telle que $a_0 \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un DL d'ordre n en 0.
Pour déterminer le DL de $\frac{1}{f}$, on écrit

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0(1 - g(x))},$$

où $g(x) = -\frac{1}{a_0}(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \circ(x^n))$.
On compose ensuite le DL de g avec celui de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Exemple : Calculer le DL d'ordre 7 à l'origine de $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

On sait que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \circ(x^7)$. On pose $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - g(x)}$, avec $X = g(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \circ(x^7)$. On utilise ensuite $\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + \circ(X^3)$. On a $X^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \circ(x^7)$ et $X^3 = \frac{x^6}{8} + \circ(x^7)$.
On obtient finalement : $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \circ(x^7)$.

4 Équivalents usuels au voisinage de 0

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad \sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \text{sh } x \underset{0}{\sim} x$$

$$\tan x \underset{0}{\sim} x \qquad \text{th } x \underset{0}{\sim} x \qquad \arcsin x \underset{0}{\sim} x \qquad \arctan x \underset{0}{\sim} x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x, \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad 1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \qquad chx - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

5 Exemple de calcul de limite

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \exp[x \ln(1 + \frac{1}{x})]$ or $\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc on a :

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \circ(\frac{1}{x})$$

d'où

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \to +\infty} \exp[x(\frac{1}{x} + \circ(\frac{1}{x}))] = \lim_{x \to +\infty} \exp[1 + \circ(1)] = e.$$

6 Exemple sur les intégrales généralisées

On note : $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} dt$

On pose $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}$.

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc localement intégrable sur $[1, +\infty[$.

Problème en $+\infty$: on utilise le théorème d'équivalence.

On a :

$$\frac{\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt[3]{t}(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{t}} - 1)}{\sqrt{t}}$$

De plus : $\sqrt[3]{1 + \frac{1}{t}} - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{3t}$.

Donc $\frac{\sqrt[3]{t}(\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}} - 1)}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt[3]{t}(\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}} - 1)}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{t}(\sqrt[3]{1+\frac{1}{t}} - 1)}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{3t^{\frac{7}{6}}}$ en 0.

Donc, d'après le théorème d'équivalence I converge.

7 Développements limités usuels au voisinage de 0

TAB. 1 - Développements limités usuels au voisinage de 0

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \circ(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})$
$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1})$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2})$
$shx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2})$
$\mathrm{argth}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$
$\mathrm{arctan}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$
$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \circ(x^8)$
$\mathrm{th}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \circ(x^8)$
$\mathrm{arcsin}x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$
$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$
$\mathrm{argsh}x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2})$

TAB. 1 – Développements limités usuels au voisinage de 0