EISTI

Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

CPI2 - 2007-2008
Lefevre - Florian
Narvarte - Michael

Techniques de résolution d'équations différentielles du premier et second ordre avec applications à la physique

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1.1 Forme générale

Soient trois applications a,b et c continues sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est de la forme :

$$(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

On définit l'*équation homogène* associée à (E) par

$$(H) : a(x)y' + b(x)y = 0$$

1.1.1 Propriété 1

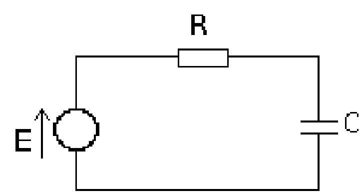
On considère l'équation $(H) : a(x)y' + b(x)y = 0$ sur un intervalle I où l'application a ne s'annule pas. La solution générale de (H) est donnée par :

$$y(x) = \alpha e^{-B(x)} \text{ , où}$$

- α est un scalaire quelconque
- B est une primitive particulière de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$ sur I.

1.1.2 Exemple physique

La charge d'un condensateur sans charge initiale, à l'aide d'un générateur de f.e.m E est régie par l'équation $(E) : R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{c} = E$, obtenue en appliquant la loi d'Ohm.
Résoudre cette équation avec condition initiale (condensateur déchargé à t=0).



Solution :

$(H) : Ry' + \dfrac{1}{C}y = 0$ admet comme solution $y_0(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}, A \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de (E) du type constant $y_p = K,\ K \in \mathbb{R}$. On remplace dans (E), on obtient $y_p(t) = EC$. Donc la solution générale de (E) est $y(t) = Ae^{\frac{-t}{RC}} + EC$.
Avec la condition initiale on a $y(0) = E \Rightarrow y(t) = E(1-C)e^{\frac{-t}{RC}} + EC$

Application avec $R = 2\Omega$, $E = 6V$ et $C = 6\mu F \Rightarrow y(t) = 6(1 - 6.10^{-6})e^{\frac{-t}{1,2.10^{-5}}} + 3,6.10^{-5}$.

1.1.3 Propriété 2

On considère l'équation (E) sur un intervalle I où l'application a ne s'annule pas. La solution générale de (E) sur I où l'application a ne s'annule pas est donnée par

$$y(x) = (C(x) + \alpha)e^{-B(x)}, \text{ où}$$

- α est un scalaire quelconque
- B est une primitive particulière de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)}$ sur I
- C est une primitive particulière de $x \mapsto \dfrac{c(x)}{a(x)}e^{B(x)}$ sur I.

1.2 Problème de Cauchy

On considère $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur un intervalle J où l'application a ne s'annule pas. Soit $x_0 \in$ J et soit t_0 un élément quelconque de $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution de (E) sur J satisfaisant la *condition initiale* $y(x_0) = t_0$. Trouver cette solution c'est résoudre le *problème de Cauchy* relatif à cette condition initiale.

1.3 Solutions particulières usuelles

1. Etant donnés $\alpha \in \mathbb{R}$ et p un polynôme de degré $n > 0$ (polynôme non constant), l'équation différentielle
$$y' + \alpha y = p(x)$$
admet comme solution particulière sur $\mathbb{R}$
   - un polynôme de degré $n + 1$ si $\alpha = 0$
   - un polynôme de degré n si $\alpha \neq 0$
2. Etant donnés $\alpha \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ et p un polynôme de degré n, l'équation
$$y' + \alpha y = e^{mx}p(x)$$
admet une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de la forme $y_1(x) = e^{mx}q(x)$, où q est un polynôme de degré n.

1.4 Méthode de la variation de la constante

On considère les équations $(H) : a(x)y' + b(x)y = 0$ et $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur un intervalle I où l'application a ne s'annule pas. Soit $x \mapsto y_{00}(x)$ une solution non nulle de (H) sur I. On sait alors que la solution générale de (H) s'écrit λy_{00} avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour résoudre complétement (E) sur I, il suffit d'en connaître une solution particulière. On cherche alors une telle solution sous la forme $y_1 : x \mapsto \lambda(x)y_0(x)$, où maintenant λ est une application dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on fait varier la constante).

Exemple : Soit l'équation différentielle (E) : $2t(1 + t)y' + (1 + t)y = 1$. Démontrer que la solution de (E) sur $]0, +\infty[$ est : $y(t) = \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

La solution de l'équation homogène associée est : $y_0(t) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{t}}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de (E) est : $y_1(t) = \dfrac{\alpha(t)}{\sqrt{t}}$. On dérive y_1. On remplace dans (E) et on aboutit à $\alpha'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(1 + t)}$ dont une primitive est $\alpha(t) = \arctan(\sqrt{t})$. Donc $y_1(t) = \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

Ainsi la solution générale de (E) est : $y(t) = \dfrac{\alpha + \arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.5 Méthodologie

Soit l'équation différentielle définie par :

$$(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

1. Définir le domaine de définition de (E)
2. Résoudre l'équation homogène associée : y_0
3. Déterminer y_1 une solution particulière de (E)
4. En déduire les solutions de (E) : $y = y_0 + y_1$
5. Eventuellement déterminer la constante à l'aide de la condition initiale.

1.6 Équation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est de la forme $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

La résolution de ce type d'équation est donnée sur :
http ://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_diff%C3%A9rentielle_de_Bernoulli

1.7 Équation de Riccati

Une équation de Riccati est de la forme $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

La résolution de ce type d'équation est donnée sur :
http ://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_de_Riccati

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Soient a,b et c trois éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soit d une application continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. Dans ce paragraphe l'équation différentielle est de la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$$

On définit l'*équation homogène associée* à (E) par

$$(H) : ay'' + by' + cy = 0$$

Soit $t \in \mathbb{K}$, alors l'application $y : x \mapsto e^{tx}$ est solution de (H) si et seulement si $at^2 + bt + c = 0$.
L'équation $at^2 + bt + c = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (H) et (E).

2.1 Solution générale de l'équation (H)

2.1.1 Solution générale dans le cas complexe

On note (C) l'équation caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- si $\Delta \neq 0$, l'équation (C) admet deux racines complexes distinctes z_1 et z_2. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) s'écrit

$$y_0(x) = \alpha e^{z_1 x} + \beta e^{z_2 x},\ \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

- si $\Delta = 0$ l'équation (C) admet une racine double z dans $\mathbb{C}$. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$) s'écrit

$$y_0(x) = (\alpha + \beta x)e^{zx}, \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

2.1.2 Solution générale dans le cas réel

On note (C) l'équation caractéristique et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- si $\Delta > 0$, l'équation (C) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$y_0(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},\ \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta = 0$, l'équation (C) admet une racine double r dans $\mathbb{R}$. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$y_0(x) = (\alpha + \beta x)e^{rx},\ \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta < 0$, l'équation (C) admet deux racines complexes conjuguées r et $\bar{r}$. Notons le complexe r sous sa forme algébrique $r = u + iv$, avec $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^*$. La solution générale de (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$y_0(x) = e^{ux}(\alpha cos(vx) + \beta sin(vx)),\ \text{avec}\ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

2.2 Propriété 3 : solution générale de (E)

L'équation différentielle de (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$. La solution générale de (E) s'écrit $y = y_0 + y_1$ avec y_0 la solution de l'équation homogène associée et y_1 une solution particulière de (E).

2.3 Propriété 4 : problème de Cauchy

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution de (E) vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = t_0$ et $y'(x_0) = m$.

2.4 Solutions particulières usuelles

Soit $(C) : at^2 + bt + c = 0$ l'équation caractéristique de $(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$ $(a \neq 0)$. On note $d(x)$ le second membre.

Cas 1 : si $d(x) = P(x)$ avec $d^\circ(P) = n$, alors on cherche y_1 une solution particulière de (E) sous la forme :
- si $c \neq 0$, d'un polynôme de degré n
- si $c = 0$, d'un polynôme de degré $n + 1$
- si $b = c = 0$, d'un polynôme de degré $n + 2$

Cas 2 : si $d(x) = e^{kx}P(x)$ avec $d^\circ(P) = n$, alors on cherche y_1 une solution particulière (E) sous la forme :
- si k n'est pas racine de (C), $y_1(x) = e^{kx}Q(x)$, avec $d^\circ(Q) = n$
- si k est racine simple de (C), $y_1(x) = e^{kx}Q(x)$, avec $d^\circ(Q) = n + 1$
- si k est racine double de (C), $y_1(x) = e^{kx}Q(x)$, avec $d^\circ(Q) = n + 2$

Cas 3 : si $d(x) = P(x)\cos(kx) + Q(x)\sin(kx)$, alors on cherche y_1 une solution particulière (E) sous la forme :
- si $\mathbf{i}k$ n'est pas racine de (C), $y_1(x) = U(x)\cos(kx) + V(x)\sin(kx)$, avec U et V deux polynômes et $max(d^\circ(U), d^\circ(V)) = max(d^\circ(P), d^\circ(Q))$
- si $\mathbf{i}k$ est racine de (C), $y_1(x) = U(x)\cos(kx) + V(x)\sin(kx)$, avec U et V deux polynômes et $max(d^\circ(U), d^\circ(V)) = 1 + max(d^\circ(P), d^\circ(Q))$

Cas 4 : si $d(x) = (P(x)\cos(kx) + Q(x)\sin(kx))\, e^{mx}$ alors on se ramène au cas 3 en posant $y = e^{mx}z$.

2.5 Méthode de la variation de la constante

Soit l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$ avec $a \neq 0$. La solution générale de son équation homogène (H) est de la forme $y_0(x) = \alpha\phi(x) + \beta\psi(x)$. On cherche alors y_1 une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y_1(x) = \alpha(x)\phi(x) + \beta(x)\psi(x),$$

où ϕ et ψ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$y_1'(x) = \alpha(x)\phi'(x) + \beta(x)\psi'(x).$$

2.5.1 Exemple mathématique

Soit l'équation différentielle de (E) suivante, définie sur $]0, +\infty[$:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{t-1}{t^2}e^{-t}$$

Solution de l'équation sans second membre : La résolution de l'équation sans second membre nous donne :

$$y_0(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-2t}, \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On cherche donc une solution particulière y_1 vérifiant :

$$\begin{cases} y_1(t) = \lambda_1(t)e^{-t} + \lambda_2(t)e^{-2t} \\ y_1'(t) = -\lambda_1(t)e^{-t} - 2\lambda_2(t)e^{-2t} \\ y_1''(t) = -\lambda_1'(t)e^{-t} + \lambda_1(t)e^{-t} - 2\lambda_2'(t)e^{-2t} + 4\lambda_2(t)e^{-2t} \end{cases}$$

On remplace alors y_1'', y_1' et y_1 dans (E) et on obtient :

$$\begin{cases} -\lambda_1'(t)e^{-t} - 2\lambda_2'(t)e^{-2t} = \dfrac{t-1}{t^2}e^{-t} \\ \lambda_1'(t)e^{-t} + \lambda_2'(t)e^{-2t} = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} \lambda_2'(t) = \dfrac{1-t}{t^2}e^t \\ \lambda_1'(t) = \dfrac{t-1}{t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2(t) = -\dfrac{e^t}{t} \\ \lambda_1(t) = \ln t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Solution particulière : Une solution particulière de l'équation (E) : $y(t) = e^{-t}\ln t$.

Solutions de l'équation : Les solutions sont donc de la forme ($\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$) :

$$y(t) = e^{-t}\ln t + \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-2t}$$

3 Équations différentielles non linéaires à variables séparables d'ordre 1

On appelle équation différentielle non linéaire à variables séparables d'ordre 1 toute relation de la forme : $\Phi(x, y, y') = 0$ liant une fonction inconnue y de la variable x et sa dérivée première y'.

Une équation différentielle, du premier ordre $\Phi(x, y, y') = 0$, à variables séparables peut se mettre sous la forme $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ qui peut s'écrire sous une forme plus symétrique : $y'g(y) = h(x)$.

Résolution :
Si G et H sont des primitives des fonctions g et h, alors par intégration de chaque membre : $\int g(y)dy = \int h(x)dx$ on obtient l'équation cartésienne des courbes intégrales $G(y) = H(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : Il n'est pas toujours possible d'expliciter y en fonction de x.

Exemple : Soit $(E) : y' - 2xe^{-y} = 0 \Leftrightarrow y'e^{y} = 2x$. On obtient $e^{y} = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Solution générale de $(E) : y(x) = \ln(x^2 + C)$, $C \in \mathbb{R}$.