UFR de SCIENCES et TECHNIQUES PAU	SESSION D'EXAMENS :		DIPLÔME / MENTION	
	juin 2006	1ère SESSION		
DATE	CODE APOGEE LIBELLE DE L'EPREUVE		Parcours ou Spécialité	
12/6/06	TMQL51U	Intro. Modélis. Statistique	Licences math, MASS	
	Durée de l'épreuve :		Nom de l'enseignant :	
	2 heures		Marc ARTZROUNI	

Documents autorisés

Calculatrice (portant le logo UPPA)	**OUI**	x	**NON**	
Autres documents	**OUI**		**NON**	x

Si oui, documents autorisés :

NOTES: Exercice 1: / 7 ; Exercice 2 : / 7 ; Exercice 3 : / 6 ;

SUJET :

N'oubliez pas de mettre votre nom sur la feuille d'anonymat. Barème approximatif entre parenthèses. *Donner les résultats numériques avec 3 chiffres significatifs.*

****

Exercice 1

La somme des tailles des 31 jeunes femmes présentes dans l'amphi au premier cours était de 5128 cm. La somme des carrés de ces tailles était de 849208.

a. (1 pt) Donnez les valeurs estimées de la taille moyenne et de l'écart-type de ces tailles.

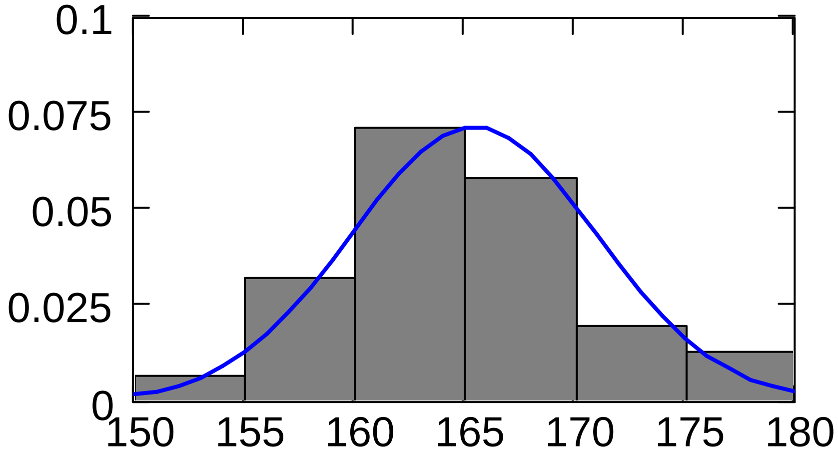
On rappelle la formule

$$(\sigma_{fe})^2 = \frac{\sum_k (TF_f)^2}{n_f - 1} - \frac{n_f}{n_f - 1} \cdot (\mu_{fe})^2$$

Taille moyenne estimée: __165.42____

Ecart-type estimé: __5.59 ___

2. On donne ci-dessous l'histogramme de ces tailles où l'on rappelle que l'aire de chaque rectangle est égale à la fréquence avec laquelle les observations sont tombées dans l'intervalle de taille correspondant.
i. (1 pt) Utilisez le graphe pour estimer grossièrement la fréquence avec laquelle la taille se trouvait entre 155 et 160 cm. **Réponse: 0.030 $\times$ 5 = 0.15**



ii. (1 pt) Quelle est la moyenne et l'écart-type de la loi normale qui approxime cette distribution?

Moyenne: μ_{fe} **= 165.42**

Ecart-type: σ_{fe} = **5.59** :

$$f(x) := \frac{\exp\left[-0.5 \cdot \left(\frac{x-\mu_{fe}}{\sigma_{fe}}\right)^2\right]}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_{fe}}$$

iii. (2 pts) Calculer la valeur de la densité de cette loi normale
- à sa valeur moyenne:

Réponse: f(μ_{fe}) = 0.071

- à sa valeur moyenne $\pm$ un écart-type:

Réponse: f($\mu_{fe} \pm \sigma_{fe}$) = 0.043

iv. (1 pt) Tracez cette densité de façon approximative sur le même graphe.

3. (1 pt) Utilisez l'approximation normale pour trouver la probabilité que la taille d'une jeune femme soit entre 157 et 168 cm (table de la loi normale en dernière page).
= proba que $N_{0,1}$ soit entre -1.51 et 0.46

Réponse: 0.6772 – (1- 0.9345) = 0.61

****

Exercice 2

Dans une expérience de laboratoire, *n* souris ont chacune une probabilité *p* d'attraper un certain virus.
1. (1 pt) Quelle est la loi du nombre S de souris qui seront infectées?

Loi binomiale de paramètres n et p

2. (3 pts) Donner les expressions pour:

i. P(S=k) : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

ii. L'espérance de S: np

iii. L'écart-type de S: $\sqrt{np(1-p)}$
2. Application numérique: *n=30; p=0.45.*

i. (2 pt) Calculer la probabilité que 12 ou 13 souris soient infectées:

$$\text{dbinom}(12, 30, 0.45) = 0.126$$
$$\text{dbinom}(13, 30, 0.45) = 0.143$$

Réponse: 0.269

ii. (1 pt) Expliquer quelle loi normale on peut utiliser pour approximer cette même probabilité, et faites le calcul correspondant.

Loi normale de moyenne np = 13.45 et d'écart-type $\sqrt{np(1-p)}$ **= 2.725**

proba que $N_{0,1}$ soit entre (11.5-13.45)/2.725=–0.72 et (13.5-13.45)/2.725 =0.02

Réponse: 0.508 - (1- 0.7642) = 0.272

****

Exercice 3

Des voitures arrivent à une station service en moyenne toutes les 20 secondes. On considère que le processus d'arrivée de ces voitures est un processus de Poisson.

1. (1 pt) Donner la loi du temps qui sépare deux arrivées (on prendra la minute comme unité de temps).

Loi exponentielle de paramètre $\lambda = 3$; Si X est le temps entre 2 arrivées alors $P(X<a) = 1-\exp(-\lambda a)$

2. (2 pt) Donner la probabilité que la première voiture arrive:
i. avant 10 secondes:

$P(X<1/6) = 1- \exp(-3/6) = 0.393$

Réponse: __0.393

ii. après 15 secondes:

$P(X>0.25) = \exp(-3 \times 0.25) = 0.472$

Réponse: 0.472
3. (1 pt) Donner la loi du nombre d'arrivées dans les t premières minutes.

Loi de Poisson de paramètre $\lambda t = 3t$: $P(N(t)=k) = \exp(-\lambda t)(\lambda t)^k/k!$

4. (2 pts) Donner la probabilité de
3 arrivées en 1 minutes: t=1

$$\exp(-3) \cdot \frac{3^3}{3!} = 0.224$$

Réponse: __0.224____
6 arrivées en 2 minutes:

$$\exp(-6) \cdot \frac{6^6}{6!} = 0.161$$

Réponse: 0.161

La table c-dessous donne l'aire colorée pnorm(a,0,1)
à l'intersection (li(1ère col),col(1ère li)) où a>0 s'écri
a=li +col avec li = unités,dixièmes et col = centième.
Exemple: si a=1.13, li=1.1, col=0.03 et on lit

$$\mathrm{pnorm}(1.13\,,0\,,1) = 0.8708 \ .$$

NB: pnorm(-a,0,1) = 1-pnorm(a,0,1).

M =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2	0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
3	0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
4	0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
5	0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
6	0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
7	0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
8	0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
9	0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
10	0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
11	0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
12	1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
13	1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
14	1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
15	1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
16	1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
17	1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
18	1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
19	1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
20	1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
21	1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
22	2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
23	2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
24	2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
25	2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
26	2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
27	2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
28	2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
29	2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
30	2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
31	2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
32	3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999