26 / 06/ 07
TMQL51U – Intro à la modélisation stat.
***Durée:* 2 heures**
Aucun document autorisé - calculatrice autorisée

Colle ici

NOM (majuscules):

Prénom:

Colle ici

NOTES:
Problème: ___ /14

Exercice: _____/ 6

TOTAL: ________________

***N'oubliez pas d'indiquer votre nom.* Colle disponible quand vous rendez la copie. Donnez vos réponses à la suite de chaque question, *aux endroits prévus.* Barème approximatif entre parenthèses. <u>Résultats avec 3 chiffres significatifs.</u>**
Tableau pour loi normale donnée en dernière page.

<u>Problème</u>

On considère une roulette qui a les 36 nombres de 1 à 36 plus **deux zéros**.
1. (1 pt) Quelle est la probabilité *p* que la boule tombe sur un nombre entre 1 et 12 compris?

p= **12/38 = 0.316**

2. (1 pt) Si on parie un euro sur les 12 premiers numéros on gagne 2 euros (supplémentaires) en cas de gain et on perd son euro dans le cas contraire.
i. Quelle est l'espérance du gain à chaque jeu?
2(12/38) - 1(26/38) = -1/19

Réponse: 0.0523
3.(2 pts) On joue *n* fois à ce même jeu, et on appelle S le nombre de parties gagnantes.
i. Exprimez S comme la somme de n variables aléatoires X_k (k=1, 2, ...,n), en précisant la loi de chaque X_k.

$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X_k}$ **avec chaque X_k une variable de Bernoulli de paramètre p**

Loi de chaque X_k: **$P(X_k=1)=p$; $P(X_k=0)=1- p$**
ii. Quelle est la loi de S (**exprimée en fonction de p et n**).

Loi binomiale de paramètre n, p:

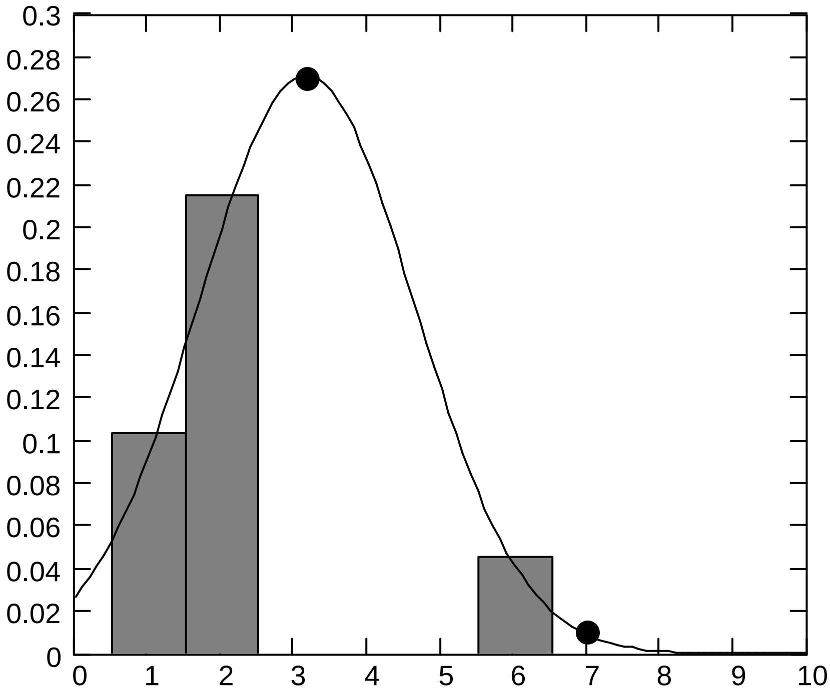
Réponse: $\mathbf{P(S = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}}$

Espérance de S: **np** Ecart-type de S: $\sqrt{\mathbf{np(1-p)}}$

4. (1.5 pt) Avec *p* obtenu en 1 et n=10, calculez les probabilités que S=1, 2, ou 6.
et représentez-les dans le graphe plus bas par des rectangles de base 1

Formule $\mathbf{P(S=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$ **avec p=0.316, n=10, et k=1, 2, 6.**

P(S=1) = 0.104; P(S=2) = 0.216; P(S=6) =0.046



Nom de la variable aléatoire N: ___**Normale** __

de densité: **f(x) =** $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ \mathbf{exp}\left[-\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$

et de paramètres: μ=**np= 3.158 = ; écart-type** $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ **= 1.47**

6. (1.5 pts) Calculez la valeur de la densité de N en sa valeur moyenne et en 7. Indiquez ces valeurs par des gros points noirs sur le graphe et tracez la densité de façon approximative pour toute valeur entre 0 et 10

C'est la densité en x=μ=3.158 qui est f(μ) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$ **= 0.271**

f(7) = 0.008914

Densité en la valeur moyenne: 0.27   en 7: 0.008914

7 . (2 pts) Calculez la probabilité exacte que S≥5 et S≤6.

Avec n=10 et p=0.316, cette proba est égale à

$$C_n^5 p^5 (1-p)^{n-5} + C_n^6 p^6 (1-p)^{n-6} = 0.119 + 0.046 = 0.165$$

Réponse: 0.165

8. (3 pts) Utilisez la variable aléatoire N pour approximer cette probabilité.

On calcule z1=(4.5-3.16)/1.47 = 0.91 et z2=(6.5-3.16)/1.47 = 2.27;
on cherche l'aire sous la densité de la loi normale centrée réduite entre 0.91 2.27 :
0.9884 - 0.8186 = 0.170

Réponse: 0.170

****

<u>**Exercice**</u>

Le temps séparant le passage de 2 voitures dans un virage est une variable aléatoire exponentiellement distribuée de moyenne λ. Un hérisson traverse la route dans le virage. Si une voiture passe pendant cette traversée elle n'a pas le temps de freiner et va heurter le hérisson.

1. (1 pt) Si le hérisson s'élance et prend T instants pour traverser la route, donner en fonction de λ et T (exprimées dans la même unité de temps) la probabilité que le hérisson sera heurté.

Proba que v.a. exponentielle X soit < T

Réponse: 1 – exp(–λT)

2. (1.5 pts) Exprimer toujours en fonction de λ et T la probabilité que k voitures passent pendant la traversée de la route.

Loi de Poisson

Réponse: exp(–λT) $(\lambda T)^k$/k!

3. (1.5 pts) **Applications numériques:** λ=0.1 minutes et T=6 minutes
iCalculez

i. le temps moyen séparant le passage de 2 voitures.

1/λ = 1/0.1 = 10 minutes

Réponse: 10 mn

ii. la probabilité que le hérisson ne sera pas heurté

exp(–λT) = exp(–0.6)

Réponse: 0.55

iii. la proba qu'il sera tué sachant que cela se produit si 2 voitures ou plus passent pendant les T instants de la traversée.

C'est la proba qu'il passe 2 voitures ou plus =
$1-\exp(-\lambda T)\,(\lambda T)^0/0! - \exp(-\lambda T)\,(\lambda T)^1/1! = 0.12$

Réponse: 0.122

4. (1 pt) Comment pouvez-vous simuler le risque de décès de 3iii à l'aide la variable aléatoire r uniformément distribuée sur (0,1)?

Si r < 0.122 le hérisson est tué -

5. (1 pt) Simulez à l'aide des nombres 0.78, 0.23, 0.10, 0.67, et 0.51 le nombre de fois que ce décès se produira si 5 hérissons font la même traversée de façon indépendantes.

Comme le 4ème r est le seul à être plus petit que 0.122, il y a un décès sur les 5 traversées.

Nombre de décès:1

Tableau donnant la fonction de répartition pnorm(a,1,0) pour la loi normale centrée-réduite.

M =

0	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999