24 / 06/ 08
TMQL51U – Intro à la modélisation stat.
***Durée:* 2 heures**
Aucun document autorisé - calculatrice autorisée

NOTES:
Problème: ___ /14

Exercice: _____/ 6

TOTAL: ________________

Colle ici

NOM (majuscules):

Prénom:

Colle ici

N'oubliez pas d'indiquer votre nom. **Colle disponible quand vous rendez la copie. Donnez vos réponses à la suite de chaque question, *aux endroits prévus.* Barème approximatif entre parenthèses. <u>Résultats avec 3 chiffres significatifs.</u>**
Tableau pour loi normale donnée en dernière page.

Problème

On considère une roulette qui a 36 nombres de 1 à 36 plus **deux zéros**.
1. (1 pt) Quelle est la probabilité p que la boule tombe sur un nombre entre 1 et 18 compris?

p=_**18/38 = 0.474**

Réponse: ________________
2.(2 pts) On joue n fois à ce même jeu, et on appelle S le nombre de parties gagnantes.
i. Exprimez S comme la somme de n variables aléatoires X_k (k=1, 2, ...,n), en précisant la loi de chaque X_k.

$S=\Sigma X_k$

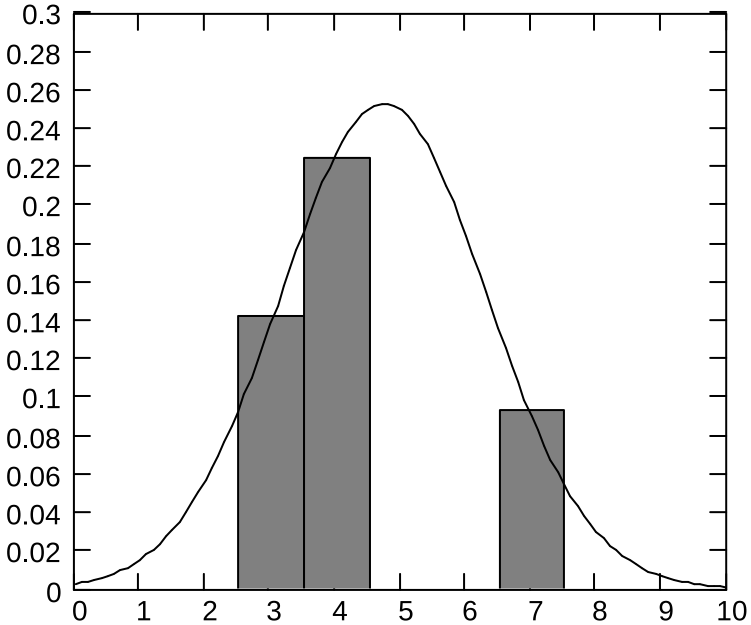
Loi de chaque X_k: Bernoulli de paramètre p = 0.474
ii. Quelle est la loi de S (**exprimée en fonction de p et n**).

Réponse: Bionomiale B(n,p) : $P(X=k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$

Espérance de S: np Ecart-type de S: $[np(1-p)]^{0.5}$

3. (2 pt) Avec *p* obtenu en 1 et n=10, calculez les probabilités que S=3, 4, ou 7.
et représentez-les dans le graphe plus bas par des rectangles de base 1

P(S=3) = 0.143 P(S=4) = 0.225 P(S=7) =0.094



4. (2 pts) Quelle est la variable aléatoire continue N qui approxime la distribution discrète de S ébauchée dans le graphe? Donnez ses paramètres et sa densité.

Nom de la v.a. N: normale; paramètres: μ=np=4.74; σ=1.579

densité: $f(x) = (2\pi)^{-0.5}\sigma^{-1} \exp[-0.5(x-\mu)^2]$

5. (3 pts) Calculez la valeur de la densité de N en 3 valeurs: 3, l'espérance de N, et 7. Indiquez ces valeurs par des gros points noirs sur le graphe et tracez la densité de façon approximative pour toutes valeurs entre 0 et 10

Densité en 3: 0.138

Densité en la valeur moyenne (qui est: 4.74) :0.253

Densité en 7:0.09

6. (2 pts) Calculez la probabilité exacte que S≥5 et S≤6.

$C(10,5)p^5(1-p)^5$ + $C(10,6)p^6(1-p)^4$ = 0.243 + 0.182 = 0.425

Réponse: 0.425

7. (2 pts) Utilisez la variable aléatoire N pour approximer cette probabilité.

$z2 := \frac{6.5 - \mu}{\sigma}$ $\quad$ $z1 := \frac{4.5 - \mu}{\sigma}$

$z1 = -0.15$ $\quad$ $z2 = 1.117$

Réponse: pnorm(1.12) - pnorm(-0.15) = 0.428

****

Exercice

Le temps séparant le passage de 2 voitures dans un virage est une variable aléatoire exponentiellement distribuée de paramètre λ. Un hérisson traverse la route dans le virage. Si une voiture passe pendant cette traversée elle n'a pas le temps de freiner et va heurter le hérisson.

1. (1 pt) Si le hérisson s'élance et prend T instants pour traverser la route, donner en fonction de λ et T la probabilité que le hérisson sera heurté.

Proba qu'un hérisson passe en moins de T instants = 1 - exp(-λT)

Réponse: 1 - exp(-λT)

2. (2 pts) Exprimer toujours en fonction de λ et T la probabilité que k voitures passent pendant la traversée de la route.

Loi de Poisson de paramètre λT.

Réponse: $(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)/k!$

3. (1.5 pts) **Applications numériques:** λ=0.1 et T=6 minutes
Calculez

i. le temps moyen séparant le passage de 2 voitures.

1/λ = 1/0.1 = 10 mn

Réponse: 10 mn

ii. la probabilité que le hérisson ne sera pas heurté.

Proba aucune voiture ne passe en T instants = $(\lambda T)^0 \exp(-\lambda T)/0!$

Réponse: 0.549

iii. la proba qu'il sera tué sachant que cela se produit si 2 voitures ou plus passent pendant les T instants de la traversée.

Proba que 2 voitures ou plus passent:

$P(N \geq 2) = 1 - P(n=0) - P(N=1) = 1 - \exp(-\lambda T)(1 + \lambda T)$

Réponse: 0.122

4. (0.5 pt) Comment pouvez-vous simuler le risque de décès de 3iii à l'aide la variable aléatoire r uniformément distribuée sur (0,1)?

Si r<0.122 on dit que le hérisson a été tué -

5. (1 pt) Simulez à l'aide des nombres 0.78, 0.23, 0.10, 0.67, et 0.51 le nombre de fois que ce décès se produira si 5 hérissons font la même traversée de façon indépendantes.

r<0.122 pour la 3ème valeur simulée de r seulement

Nombre de décès:1

Tableau donnant la fonction de répartition pnorm(a,1,0) pour la loi normale centrée-réduite.

M =

0	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999