19 / 05/ 08
TMQL51U – Intro à la modélisation stat.
***Durée:* 2 heures**
Aucun document autorisé - calculatrice autorisée

Colle ici

NOM (majuscules):

Prénom:

Colle ici

NOTES:
Exercice: ___ / 6

Problème: _____/ 14

TOTAL: ________________

***N'oubliez pas d'indiquer votre nom.* Colle disponible quand vous rendez la copie. Donnez vos réponses à la suite de chaque question, *aux endroits prévus.* Barème approximatif entre parenthèses. <u>Résultats avec 3 chiffres significatifs.</u>**
Tableau pour loi normale donnée en dernière page.

On rappelle que pour un échantillon X_1 , X_2 , ..., X_n d'une variable aléatoire X, la variance de X est estimée par la quantité

$$\frac{\sum_k (X_k)^2}{n-1} - \frac{n}{n-1} \cdot (\mu_e)^2$$

où μ_e est la moyenne empirique des X_k .

Exercice

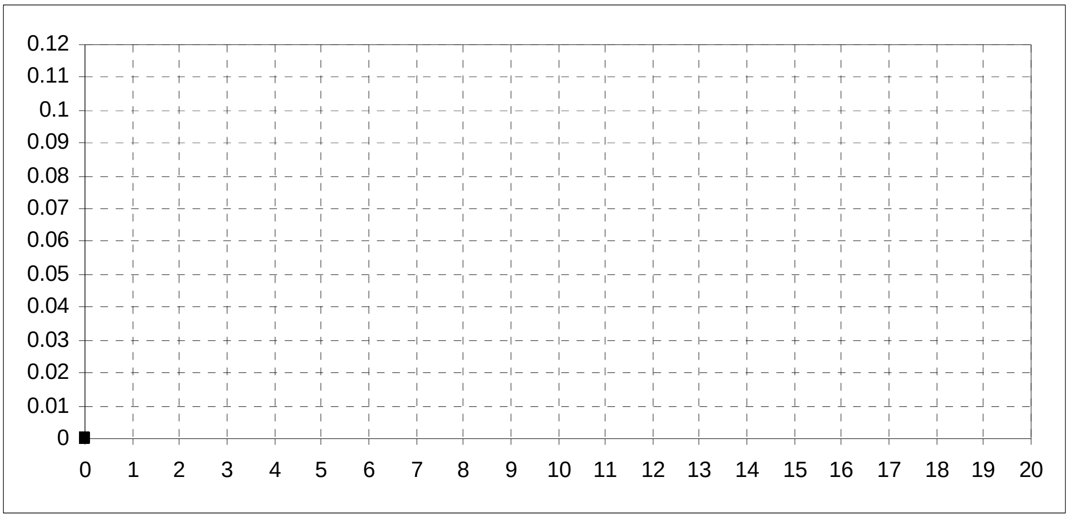
La note X à un examen est une variable aléatoire dont un échantillon est donné ci-dessous (une note entre 0 et 5, etc).

0-5	5-10	10-15	15-20
1	7	8	1

1. (2 pts) Donnez les valeurs estimées de l'espérance et de l'écart-type de X.

Espérance: ____________________ Ecart-type: ___________________

2. (1 pt) Tracez l'histogramme qui décrit ces données.



3. Deux cents candidats se présentent à un examen Air France de pilote de ligne pour lequel il n'y a que 10 places. On s'attend à ce que la distribution des notes soit la même qu'en 1. On veut savoir quelle est la note X_c qui sera dépassée par seulement 10 des 200 candidats.

Deux étapes:
i. (1 pt) Donnez la loi continue (et ses paramètres) qui approxime la loi de X et tracez-là ci-dessus.

Loi:____

ii. (2 pts) Utilisez l'approximation de i) pour trouver la valeur critique X_c.

X_c =____

Problème

A chaque seconde il y a une probabilité *p* qu'un standard téléphonique reçoive un appel.
1. On appelle S la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus en une heure.
i. (1 pt) Donner sans détails la loi de S (nom et expression exacte), son espérance, et sa variance, en fonction de p.

Loi de S :____

Espérance :____________________ **Variance:** _________________________

ii. (2 pts) Avec p=0.01 utilisez la méthode que vous voulez pour calculer la probabilité au moins approximative que S soit plus grand ou égal à 30.

Réponse: ______________________________

2. On appelle U la variable aléatoire discrète égale à la seconde à laquelle le premier appel arrive.
i. (1 pt) Donner sans détails la loi de U (nom et expression exacte), son espérance, et sa variance, en fonction de p.

Loi de U :__________________________________

Espérance :____________________ **Variance:** _________________________

ii. (1 pt) Exprimer en fonction de p et k la probabilité $P(U \geq k+1)$.

$P(U \geq k+1)$= ____________________________________

iii. (1 pt) Donner l'expression pour la valeur du terme λ tel que la probabilité $P(U \geq k+1)$ puisse s'écrire $\exp(-\lambda k)$.

λ = ________________

iv. (1 pt) Exprimer λ quand p=0.01: λ=
quand p=0.1: λ=
quand p=0.5: λ=

3. On considère que U, exprimée en secondes, est une variable aléatoire continue qu'on appelle X. La probabilité que X soit plus grande que x s'écrit maintenant $\exp(-\lambda x)$.

i. (1 pt) Comment s'appelle cette variable aléatoire X, et quelle est sa fonction de répartition?

Réponse: ____

ii. (2 pts) Avec p=0.01 utilisez X et les nombres aléatoires 0.23, 0.12, 0.56 uniformément distribués sur (0,1) pour simuler trois fois l'événement: "Au moins un appel arrive en 30 secondes".

1ère simulation: ____________________________________

2ème simulation: ____________________________________

3ème simulation: ____________________________________

4. On appelle N la variable aléatoire égale au nombre d'appels reçus en 30 secondes.
i. (2 pts). Donner en fonction de λ la probabilité qu'il y ait exactement k appels en 30 secondes.

Réponse: ____

ii. (1 pt) Avec p=0.01, calculez les probabilités

P(N=0) = ________________________

P(N=1) = ___________________________

P(N≥2) = _____________________

iii. (1 pt) Toujours avec $p=0.01$, utilisez les nombres aléatoires 0.43, 0.02, 0.96, 0.54 pour simuler quatre fois les trois événements possibles de ii. Expliquez la méthode.

Nombre de fois que $N=0$: ________

Nombre de fois que $N=1$: ________

Nombre de fois que $N\geq 2$:__________

Tableau donnant la fonction de répartition pnorm(a,1,0) pour la loi normale centrée-réduite.

M =

0	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999