EISTI
Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

CPI2 2007/08 – 09/06/2008
Aucun document autorisé - calculatrice UPPA autorisée
Table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite fournie
Durée : 3 heures

Examen en Probabilités

Exercice 1 :
Soient k, n deux entiers naturels tels que $2 \leq k \leq n$.

1) a) Montrer que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

b) En déduire que $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}$.

2) En déduire :

a) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k$.

b) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k$.

Exercice 2 :
On a volé la Joconde. Deux ans plus tard, en perquisitionnant chez un collectionneur, la police retrouve le tableau.
Un doute plane sur l'authenticité de la toile. On estime à 80% la probabilité pour que ce soit celle que Léonard de Vinci a peinte.
On consulte alors deux experts en peinture de la Renaissance. Le premier, qui se trompe trois fois sur cinq, déclare que le tableau est authentique. Le deuxième, qui se trompe deux fois sur onze, annonce que c'est une copie. Les conclusions des experts sont indépendantes.

Calculer la probabilité d'avoir retrouvé la Joconde authentique.

Exercice 3 :
Soient a un réel positif ou nul, b un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Vérifier que f peut être la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2) Déterminer la fonction de répartition de X.

3) Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = X - a$.

   a) Déterminer la fonction de répartition de Y.

   b) Reconnaître la loi de Y. (Préciser son nom et son (ou ses) paramètre(s).)

   c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.

   d) En déduire l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 4 :
Dans l'eau rejetée par une centrale nucléaire, un pisciculteur daltonien croit élever des poissons rouges. En réalité, 2% des poissons du bassin sont verts. Un incident de fonctionnement du réacteur provoque une brusque élévation de la température qui est fatale à certains poissons. Parmi les victimes, il y a 2% de poissons verts. Le pisciculteur ramasse 150 poissons morts au hasard pour en mesurer la radioactvité.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de poissons verts dans l'échantillon.

1) a) Quelle est la loi de X (nom et paramètre(s)) ? (Justifiez votre réponse.)

   b) Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.

   c) Par quelle loi Y (nom et paramètre(s)) peut-on approximer X ? (Justifiez votre réponse.)

   d) En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que le nombre de poissons verts dans l'échantillon soit strictement supérieur à 3.

2) La proportion de poissons verts dans les rescapés n'ayant pas changé, le pisciculteur décide de trier les poissons. Pour éliminer tous les poissons verts, il doit écarter 5% des poissons du bassin pour les placer dans un étang sans poisson. Par une nuit sans lune, un braconnier attrape 200 de ces poissons dans un filet.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de poissons verts pris dans le filet.

   a) Quelle est la loi de Z (nom et paramètre(s)) ? (Justifiez votre réponse.)

   b) Par quelle loi T (nom et paramètre(s)) peut-on approximer Z ? (Justifiez votre réponse.)

   c) En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que le nombre de poissons verts pris dans le filet soit strictement compris entre 75 et 85.

Exercice 5 :
Un fabricant de confiture pose des étiquettes portant la mention "pur sucre" sur des pots s'ils contiennent entre 420 et 520 grammes de sucre par kilogramme.
La variable aléatoire X égale au poids du sucre par kilogramme de confiture suit une loi normale de moyenne 465 grammes et d'écart-type 30 grammes.

1) Calculer le pourcentage de la production qui ne doit pas porter la mention "pur sucre".

2) Afin d'améliorer la qualité "pur sucre", le fabricant souhaite éliminer 15% de sa production. Déterminer un intervalle de la forme $[930-a, a]$ (avec $a > 0$) tel que la probabilité $P(930 - a \leq X \leq a) = 0.85$.

3) Le responsable d'un magasin diététique lui propose d'acheter des pots à condition qu'ils aient moins de 495 grammes de sucre par kilogramme, mais au minimum y grammes par kilogramme.
Déterminer la valeur minimale de y sachant que le fabricant refusera la vente au-dessus de 20 % de pots rejetés.

Exercice 6 :
Un automobiliste doit dévisser dans le brouillard les boulons d'une roue de sa voiture. Il utilise un objet en forme de croix dont les quatre extrémités sont des clefs de tailles différentes indiscenables au toucher.

1) Il procède au hasard et sans méthode. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'essais.

   a) Reconnaître la loi de X. (Préciser son nom et son (ou ses) paramètre(s).)

   b) Déterminer la probabilité de faire trois essais pour trouver la bonne clef.

   c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

2) Il procède au hasard en éliminant les extrémités déjà testées. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre d'essais.

   a) Etablir la loi de probabilité de Y.

   b) En déduire l'espérance mathématique et la variance de Y.