EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

CPI2 - 2007-2008
Pradet Quentin
Vivier Anthony

Fonctions à deux variables réélles

1 Dérivation

1.1 Limite

Dans ce document, on considère des fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$$

On dit que f admet l ($\in \mathbb{R}$) pour limite en $a \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, (||x - a||) < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $a \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A, (\|x - a\|) < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

1.2 Dérivées partielles

Soit f une fonction définie d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet une *dérivée première par rapport à x en (x, y)* si la dérivée de la fonction

$$f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x, y)$$

existe en x. On note

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f_y^{'}(x, y)$$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, on dérive f par rapport à la variable x en considérant y comme un nombre constant.

On procède de la même façon pour la dérivée première par rapport à y en (x,y).
Si chaque dérivée partielle est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on obtient la différentielle totale :

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.}$$

1.3 Composition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v des fonctions de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.
On note

$$g : I \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(u(t), v(t))$$

Si $\left\{ \begin{array}{l} u \textit{ et } v \textit{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \textit{ sur } I \\ f \textit{ est de classe } \mathcal{C}^1 \textit{ sur } \mathcal{U} \end{array} \right.$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$\boxed{\forall t \in I, g^{'}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) \times u^{'}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) \times v^{'}(t)}$$

1.4 Définition du gradient

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, on appelle *gradient de f*, et on note $\overrightarrow{grad}\ f$ l'application :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{grad}f : \mathcal{U} &\to \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\mapsto (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))\end{aligned}$$

1.5 Développement limité

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$, $a = (\alpha, \beta) \in \mathcal{U}$.
Notons $\mathcal{U}_0 = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2; (\alpha + h, \beta + k) \in \mathcal{U}\}$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si, et seulement si il existe une application $\epsilon \colon \mathcal{U}_0 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall (h,k) \in \mathcal{U}_0, f(\alpha+h, \beta+k) = f(a) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) + \|(h,k)\|\epsilon(h,k) \\ \epsilon(h,k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

1.6 Jacobien

<u>Définition</u> : Soient $\mathbb{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{U}$, $f \colon \mathbb{U} \mapsto \mathbb{R}^m$, avec $m \in \mathbb{N}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{U}$. On apelle matrice jacobienne de f en a et on note $J_f(a)$ la matrice de $d_a f$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^m$. Si l'on note $f_1, \ldots, f_2$ sont les composantes de f : $\boxed{\forall x \in \mathbb{U} \qquad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_2(x)) \in \mathbb{R}^2.}$

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(a) \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \in M_{2,m}(\mathbb{R})$$

<u>Définition</u> : Si $m = 2$, on appelle *(déterminant) jacobien de f en a* le déterminant de la matrice jacobienne de f en a.

2 Intégration

2.1 Définition

Soit R $= [a,b] \times [c,d]$ un rectangle du plan et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On définit :

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

On admettra le théorème de Fubini qui énonce que le rôle des deux variables est symétrique, c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

2.2 Changement de variables

Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $\phi \colon U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, Δ une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$ incluse dans U, $f \colon \phi(\Delta) \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors :

- $\phi(\Delta)$ est quarrable
- $\iint_{\phi(\Delta)} f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\phi(u,v))|det(J_\phi(u,v))|dudv$

Plus particulièrement, on peut effectuer un changement de variables en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta \ ou \ \Delta \ = \ \{(r,\theta)|(r\cos\theta, r\sin\theta) \ \in \ D\}$$

2.3 Formule de Green-Riemann

Soient C une courbe plane simple, D le domaine du plan délimité par C et $Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur le domaine D alors :

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx.dy = \int_C Pdx + Qdy}$$

Annexes

- Définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme : Une fonction f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$
- Définition d'une partie quarrable : On dit que la partie D quarrable si la fonction constante égale à 1 est intégrable sur D et l intégrale sur D de cette fonction est par définition l aire de D.