10 / 05/ 07
TMQL51U – Intro à la modélisation stat.
***Durée:* 2 heures**
Aucun document autorisé - calculatrice autorisée

Colle ici

NOM (majuscules):

Prénom:

Colle ici

NOTES:
Problème: ___ /15

Exercice: _____/ 5

TOTAL: ________________

***N'oubliez pas d'indiquer votre nom.* Colle disponible quand vous rendez la copie. Donnez vos réponses à la suite de chaque question, *aux endroits prévus.* Barème approximatif entre parenthèses. <u>Résultats avec 3 chiffres significatifs.</u>**
Tableau pour loi normale donnée en dernière page.

Problème

Un modèle météorologique est basé sur l'hypothèse que dans un ciel orageux il y a à chaque seconde une probabilité p d'un éclair. Les parties 1 et 2 ci-dessous sont indépendantes.

Partie 1 (8 pts)

1. (0.5 pt) Exprimer la probabilité qu'il n'y ait pas d'éclair pendant m secondes.

Réponse: $(1-p)^m$

2. (0.5 pt) On appelle U la variable aléatoire égale à la seconde à laquelle le premier éclair se produit. Donnez la loi de U et explicitez-là en fonction de p ?

Réponse: Loi géométrique : $P(U=k) = (1-p)^{k-1}\, p$

3. (1 pt) Pour un entier m, donnez Proba(U>m)

Même probabilité qu'en 1 de ne pas avoir d'éclair pendant m secondes:

Réponse: $(1-p)^m$

4. (1 pt) On veut modéliser le temps auquel se produit le premier éclair comme une variable aléatoire continue X. Pour cela on considère que la probabilité d'un éclair durant un petit intervalle de temps de longueur dt (exprimé en secondes) est proportionnelle à la longueur de cet intervalle. Sachant que la probabilité de l'éclair en une seconde est toujours *p*, quel est le coefficient de proportionnalité ? **Réponse: p**

La probabilité d'un éclaire durant un intervalle de temps de longueur dt est : p.dt

5. On se place à un temps t (temps continu, exprimé en secondes). On divise (0, t) en n intervalles de longueurs égales (n>t).
i. Quelle est la longueur *dt* de chaque intervalle? **t/n**
ii. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'éclair pendant chaque intervalle de temps?

Réponse: p.dt qui est ici p.t/n
iii. (1 pt) Si X est le temps jusqu'au premier éclair, exprimez pour *p*, *t*, et *n* fixés, la probabilité P(X>t) que X soit plus grand que t.

Réponse: __$(1 – p.t/n)^{n}$
iv. (1 pt) Que devient cette probabilité quand $n\to\infty$?

Réponse: Elle tend vers exp(–p.t)

v. (1 pt) En déduire quand $n\to\infty$ la loi de X, considérée comme une variable aléatoire continue.

Réponse: La probabilité que X soit > t tend vers exp(–p.t) ce qui veut dire que X suit une loi exponentielle de paramètre p.

vi. (2 pts) *Application numérique:* p=0.015, t=120 sec, n=240.
Quelle est la probabilité exacte (dans le contexte du modèle discret) que le premier éclair ait lieu durant le 241ème intervalle (correspondant à l'intervalle de temps 120, 120+0.5)?

Réponse: Loi géométrique, la proba de succès au 241ème essai est
$(1 - p.t/n)^n$ p.t/n =0.001231

Utilisez la loi continue obtenue en v pour calculer la même probabilité du premier événement entre 120 et 120.5:

Réponse: La proba est P(X<120.5) - P(X<120) = exp(–120p) - exp(–120.5p) = 0.001235, ce qui est très proche.

Partie 2 (7 pts)

1. (0.5 pt) Quelle est la loi du nombre S d'éclairs en n secondes. Explicitez cette loi en fonction de p et n.

Loi binomiale de paramètre n et p

Réponse: $P(S=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ **(1)**

2. (0.5 pt) Rappelez l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire S:

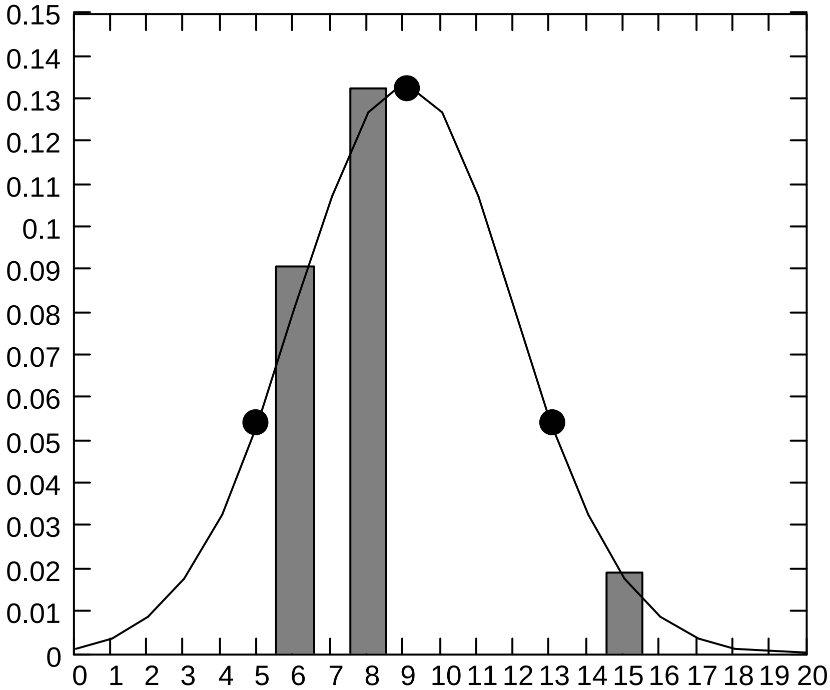
Espérance: __**np** ____________________ Ecart-type: $\sqrt{np(1-p)}$

Application numérique: Avec p=0.015, S est le nombre d'éclairs en 10 minutes.
3. (2 pt) Dans le graphe plus bas représentez par des rectangles de base 1 les probabilités que vous calculerez pour S=6, 8, et 15.

Formule (1) avec n=600 (600 secondes en 10 mn) , p=0.0015, et k=6, 8, et 15.

P(S=6) = 0.091 ; P(S=8) = 0.0133; P(S=15) = 0.019

4. (2 pts) Quelle est la variable aléatoire continue qui approxime la distribution discrète de S ébauchée dans le graphe?   Donnez ses paramètres et tracez-là dans le même graphe sur la base des valeurs de sa densité calculées en 5, 9, et 13.



Variable aléatoire: Loi normale

De paramètres: moyenne μ=np = 9; écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ = 2.98

Densité: $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ \mathbf{exp}\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

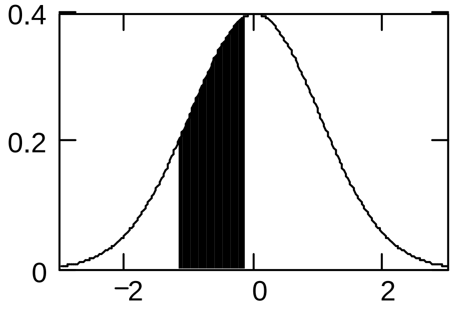
Densité en 5: 0.054 en 9: 0.134 en 13: 0.054 (points noirs)

5. (1 pt) Calculez la probabilité exacte que S≥6 et S≤8.

Réponse: Formule (1) page précédente pour calculer P(S=6) + P(S=7) + P(S=8) =
0.091 + 0.117 + 0.133 = 0.341

6. (1 pt) Utilisez 4 pour approximer cette probabilité.

Réponse: Aire (noire) sous la densité de la loi normale centrée réduite entre z1=(5.5-9)/2.98 = –1.17 et z2=(8.5-9)/2.98 = – 0.17.



Par symétrie cette aire est donnée par la fonction de répartition en 1.17 moins la fonction de répartition en 0.17 = pnorm(1.17) - pnorm(0.17) = 0.879 – 0.5675 = 0.3115 (cf tableau de la fonction de répartition en dernière page).

Réponse: 0.3115

****

Exercice

Une étude rapide a montré que les internautes cliquaient sur le site d'un cybermarchand au rythme moyen de 4.3 clicks par minute. On suppose que le temps qui sépare 2 clicks suit une loi exponentielle.

1. (1 pt) Donner la loi du temps entre deux clicks et la valeur du paramètre correspondant (on prendra la minute comme unité de temps).

Réponse: Le temps X suit une loi exponentielle de paramètre λ qui est 4.3.

2. (1 pt) Quelle est la probabilité qu'il faille attendre plus de 15 secondes pour le premier click?

Réponse: $P(X>0.25) = \exp(-0.25\lambda) = 0.341$

3. (1 pt) Donner la loi du nombre de clicks en 2 minutes:

Réponse: Ce nombre N suit une loi de poisson de paramètre $2\lambda=8.6$:

$P(N=k) = \exp(-8.6) \times 8.6^k/k!$

4. (2 pts) Trouver la probabilité qu'il y ait :
i. 5 ou 6 clicks en 2 minutes:

Réponse: P(N=5) + P(N=6) = 0.072 + 0.103 = 0.103

ii. au moins 3 clicks en 2 minutes:

Réponse: 1 – P(N=0) – P(N=1) – P(N=2) = 1 – 0.0001841 – 0.001583 – 0.006808 = 0.991

Tableau donnant la fonction de répartition pnorm(a,1,0) pour la loi normale centrée-réduite.

M =

0	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999