EISTI

Ecole
Internationale
des Sciences
du Traitement
de l'Information

CPI2 - 2007-2008
de CARVILLE Louis
MARQUES Gwenaël

Numération en base et étude de suites adjacentes

Développement d'un nombre entier en base p $\in \mathbb{N}^*$

Le développement en base p de tout nombre entier n s'obtien de la façon suivante : On procéde par divisions successives. On divise le nombre n par la base, et ainsi de suite jusqu'à avoir un quotient nul. La suite des restes obtenus correspond aus chiffres dans la base.

Exemple : Convertissons $(44)_{10}$ vers la base 2.

$$\begin{aligned}
44 &= 22 \times 2 + 0 \Rightarrow b_0 = 0 \\
22 &= 11 \times 2 + 0 \Rightarrow b_1 = 0 \\
11 &= 5 \times 2 + 1 \Rightarrow b_2 = 1 \\
5 &= 2 \times 2 + 1 \Rightarrow b_3 = 1 \\
2 &= 1 \times 2 + 0 \Rightarrow b_4 = 0 \\
1 &= 0 \times 2 + 1 \Rightarrow b_0 = 1
\end{aligned}$$

Donc $(44)_{10} = (101100)_2$.

Développement d'un nombreréel en base p $\in \mathbb{N}^*$

Soit $p > 1$ et x un réel quelconque. On pose $x < p$.
On défini alor une suite de rationnels :

$$D_0 = [x],\ D_1 = p^{-1}[px],\ D_n = p^{-n}[p^n x], \forall n \geq 0.$$

A partir de ka suite (D_n), on définit une nouvelle suite de rationnels par,

$$\forall n \ \geq 0, E_n = D_n + p^{-n}.$$

Propriété 17

Pour tout $n \geq 0$, on a $D_n \leq x \geq E_n$. De plus la suite (D_n) est croissante et (E_n) est décroissante et leur limite commune st x.

La suite (D_n) est la *suite des approximations en base p de x par défaut.*

La suite (E_n) est la *suite des approximations en base p de x par excès.*

Exemple : Développement décimal de $\sqrt{2}$

$p = 10$ et $x = \sqrt{2}$

$D_0 = [\sqrt{2}] = 1$ $\qquad E_0 = D_0 + 1 = 2$

$D_1 = 10^{-1}[10\sqrt{2}] = 1.4$ $\qquad E_1 = D_1 + 10^{-1} = 1.5$

$D_2 = 10^{-2}[10^2\sqrt{2}] = 1.41$ ... $\qquad E_2 = D_2 + 10^{-2} = 1.42$ ...

Si l'on représente les entiers $(e_j)_{0 \leq j \leq p-1}$ tels que $0 \leq u \leq p-1$ par des symboles particuliers, on écrit le *développement en base* p de x par

$$x = b_r ... b_0, a_1 ... a_n$$

où $b_r ... b_0$ est le développement en base p de D_0 écrit avec les symboles e_j choisis, et a_n est le symbole qui correspond à $u_n = p^n(D_n - D_{n-1})$.

Exemple : Développement binaire de $\sqrt{2}$

$D_0 = [\sqrt{2}] = 1$ $\qquad u_1 = 2(D_1 - D_0) = 0$

$D_1 = 2^{-1}[2\sqrt{2}] = 5/4$ $\qquad u_2 = 4(D_2 - D_1) = 1$

$D_2 = 2^{-2}[2^2\sqrt{2}] = 11/8$ ... $\qquad u_3 = 8(D_3 - D_2 = 1$ ...

Donc en base 2, $\sqrt{2}$ s'écrit 1.011...

Ecriture en base b

Propriété 3

Tout entier $n \geq 1$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = c_p b^p + c_{p-1} b^{p-1} + ... + c_1 b + c_0 = \sum_{k=0}^{p} c_k b^k$$

avec $p \in \mathbb{N}$, $c_k \in$\{0,...,p\} et $c_p \neq 0$.

On note alors $n = c_p c_{p-1} ... c_0{}^{(b)}$

Exemple : L'entier $n = 2001$ en numérisation décimale s'écrit $n = 11111010001^2$ en numérisation binaire ($b = 2$).

Si $n = c_p c_{p-1} ... c_0{}^{(b)}$, alors c_0 est le reste dans la division euclidienne de n par la base b, et $q = c_p c_{p-1} ... c_1{}^{(b)}$ est le quotient de cette division.

Si $n = c_p c_{p-1} ... c_0{}^{(b)}$ et pour $1 \leq m \leq p$, les entiers $c_p c_{p-1} ... c_m{}^{(b)}$ et $c_m c_{m-1} ... c_0{}^{(b)}$ représentent respectivement le quotient et le reste dans la division de n par b^n

Comparaison de deux nombre écrits en base b

Soient $n = c_p c_{p-1} ... c_0{}^{(b)}$ et $n = d_p c_{d-1} ... d_0{}^{(b)}$ avec $c_p \neq 0$ et $d_p \neq 0$. Si p<q (resp. q>p) alors n<m (resp. n>m). Si p=q, alors on compare les chiffres de même rand en commençant par le rang le plus élevé : Si $c_p < d_p$ (resp. $c_p > d_p$) alors n<m (resp. n>m), sinon, si $c_{p-1} < d_{p-1}$ (resp. $c_{p-1} > d_{p-1}$) alors n<m (resp. n>m), etc.

Exemple : On a $n = 7d1^{(16)} < m = 7E1^{(16)}$ (n=2001 et m=2017)

Somme de deux nombre écrits en base b

Soient x et y deux entiers naturels non nuls. Quitte à ajouter des chiffres 0, on peut supposer que les écritures en base b de x et y sont de même longueur.

Si $x = \sum_{k=0}^{p} x_k b^k$ et $y = \sum_{k=0}^{p} y_k b^k$, on a $z = x + y = \sum_{k=0}^{p} (x_k + y_k) b^k$

Dans cette écriture, les entiers $x_k + y_k$ sont compris entre 0 et 0b-2. Ils peuvent être supérieurs à b-1 et ne représentent donc pas en général les chiffres z_k dans l'écriture de z en base b. Pour obtenir cette représentation, il faut utiliser et reporter une retenue de l chaque fois que la sommme intermédiaire $(x_k + y_k)$ obtenue est supérieure ou égale à b. Exemple : Soient $x = 3721^{(8)}$ et $y = 1067^{(8)}$. On a $x + y = 5010^{(8)}$

Produit de deux nombres écrits en base b Le produit de $n = c_p c_{p-1} ... c_0{}^{(b)}$ par la base b s'écrit $c_p c_{p-1} ... c_0{}^{(b)}$. Plus généralement, le produit par b^m s'obtient en ajoutant m fois le chiffre O à la droite de la représentation de n. Soient x et y deux entiers naturels non nuls.

Si $x = \sum_{j=0}^{p} x_j b^j$ et $y = \sum_{k=0}^{q} y_k b^k$, où $x_p \neq 0$ et $y_p \neq 0$, alors l produit peut d'écrire,

$z = xt = (\sum_{j=0}^{p} x_j b^j) \times y = \sum_{j=0}^{p} x_j b^j y = \sum_{j=0}^{p} x_j b^j \sum_{k=0}^{q} y_k b^k = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{q} x_j y_k b^{j+k}$.

Notons $t_j = \sum_{k=0}^{q} x_j y_k b^{j+k}$ le produit de y par $x_j b^j$. Cette formule ressemble à une

écriture en base b du type $t_j = (x_j y_q) ... (x_j y_0) O ... O^{(b)}$. En fait, il n'en est pas exactement ainsi car les produitj $x_j y_k$ peuvent atteindre et dépasser la valeur b. Le calcul des chiffres de t_j s'effectue en utilisant une retenue r. Contrairement à l'opération d'addition, où r ne pouvait prendre que les valeurs O et l, la retenue

peut prendre ici toutes les valeurs comprises entre O et b-l, c'est-à-dire être un chiffre quelconque dhns la base de numération b. El effet, le produit de deux entiers a, b appartenant à O,...,b-l, s'il est affecté d'une retenue r de O,...,b-l, conduit à un résultat inférieur ou égal à $(b-l)^2 + r$ donc inférieur à b(b-l). Modulo b (c'est-à-dire un rang dans l'écriture), ce résultat produit à son tour une retenue inférieure ou égale à b-l.

Exemple : Soient $x = 3\bar{7}21^{(8)}$ et $y = 17^{(8)}$. On a

$$\begin{array}{rccccc}
 & & 3 & 7 & 2 & 1 \\
\times & & & & 1 & 7 \\
\hline
 & 3 & 3 & 2 & 6 & 7 \\
 & 3 & 7 & 2 & 1 & . \\
\hline
= & 7 & 2 & 4 & 7 & 7
\end{array} \Rightarrow xy = \overline{72477}^{(8)}.$$

Exponentiation rapide Soient a et n deux entiers naturels non nuls. Pour calculer a^n, il est inefficace d'effectuer le produit de n exemplaires de a, car on peut obtenir le même résultat avec beaucoup moins d'opérations en utilisant la représentation de l'exposant n en base 2.

Posons $n = c_p c_{p-1} ... c_0{}^{(2)} = \sum_{k=0}^{p} b_k 2^k$ avec$b_k = Ooub_k = l$ pour tout $k \in O, ..., p$. Soit S k=n l'ensemble des $k \in (0, ..., p)$ tels que $b_k = l$. On a alors $n = \sum_{k \in S} 2^k$ et on en déduit $a^n = \prod_{k \in S} a^{2^k}$. Il suffit donc de calculer les $u_k = a^{2^k}$.

Or $u_o = a$ et pour tout k>O, $u_{k+1} = (u_k)^2$. On calcule donc les $u_k, k \in S$, par des élévations au carré successives. Ce calcul nécessite donc p opérations. Il reste enuite au plus p+l nouvelle multiplications pour obtenir a^n.

De plus, d'après l'écriture de n en base 2, on a $2^p \leq n \leq 2^{p+1}$, d'où $p \leq \frac{\ln n}{\ln 2} < p+1$.

Finalement, le calcul de a^n nécessite au plus 2p+1 opérations où p est la partie entière de $\frac{\ln n}{\ln 2}$, contre n-l opérations si on procède de façon récursive.

Suites adjacentes

Le théorème des suites adjacentes concerne les suites réelles et précise que deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Définition :

les suites (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes si l'une des suites est croissante (au sens large), l'autre suite décroissante au sens large et si la différence des deux tend vers 0.

On supposera par la suite que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

On trouve souvent la condition supplémentaire : pour tout entier n, $a_n \leq b_n$. Cette condition permet de mieux visualiser ce que représentent deux suites adjacentes, elle n'est cependant qu'une conséquence des deux autres conditions.

si (a_n) est croissante et (b_n) décroissante alors $(b_n \; a_n)$ est décroissante. Si la suite $(b_n \; a_n)$ est décroissante et converge vers 0 alors $(b_n \; a_n)$ est une suite à termes positifs. Donc, pour tout n,$b_n - a_n \geq 0$ donc$b_n \geq a_n$.

Le théorème des suites adjacentes stipule que , dans ces conditions, les suites convergent vers le même réel ℓ et que, pour tout entier n,$a_n \leq \ell \leq b_n$.