**NOM, Prénom:** ____________________________________

**Exercice 1: ____/ 13 ; Exercice 2: ____/7; TOTAL: ________/ 20**

# Partiel : Introduction à la modélisation statistique
# 4 avril 2008 (1h30)

***Aucun document n'est autorisé. Calculatrice autorisée.*** **Donnez vos réponses à la suite de chaque question, *aux endroits prévus.* Barème approximatif entre parenthèses*. Donner les résultats numériques avec 3 chiffres significatifs.***

**********************

## Exercice 1

Vous avez cinq feuilles de papier identiques, dont deux portent le chiffre 1 et trois le chiffre 0. Vous retournez ces feuilles afin de ne pas voir les chiffres, et vous tirez une feuille au hasard.
1. (0.5 pt) i Comment s'appelle la loi de la variable aléatoire X égale au chiffre obtenu?

**X=1 avec proba p = 2/5 = 0.4:**
**Loi de Bernoulli de paramètre p = 0.4**

ii. (0.5 pt) Quelles sont les valeurs possibles de X?
**X=0 ou 1**

iii. (1 pt) Donner l'espérance et la variance de X.

**Espérance: p = 0.4**

**Variance: pq = 0.6×0.4 = 0.24**

2. i. (0.5 pt) Comment pouvez-vous utiliser votre calculatrice pour simuler X?

**On prend un nombre aléatoire r entre 0 et 1, il tombe entre 0 et 0.4 avec proba 0.4 et dans ce cas on dit que "1" est sorti. Si r est >0.4 on dit que "0" est sorti. (on aurait pu dire "0" si r entre 0 et 0.6 --> simulation ALT )**

ii. (0.5 pt) Simuler dix valeurs de X avec les nombres aléatoires uniformément distribués sur (0,1): 0.67, 0.34, 0.32, 0.19, 0.08, 0.65, 0.23, 0.87, 0.56, 0.31.

**X= 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 OU**
**1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 : (ALT)**

3. S est la variable aléatoire égale au nombre de fois que le ***zéro*** est sorti, sur 10 tirages.
i. (0.5 pt) Quelle est la loi de S?

**Binomiale de paramètres (n,p) = (10, 0.6) .**

ii. (0.5 pt) Quelle est la valeur de S correspondant à la simulation de 2ii? **4 (ou 7, ALT)**

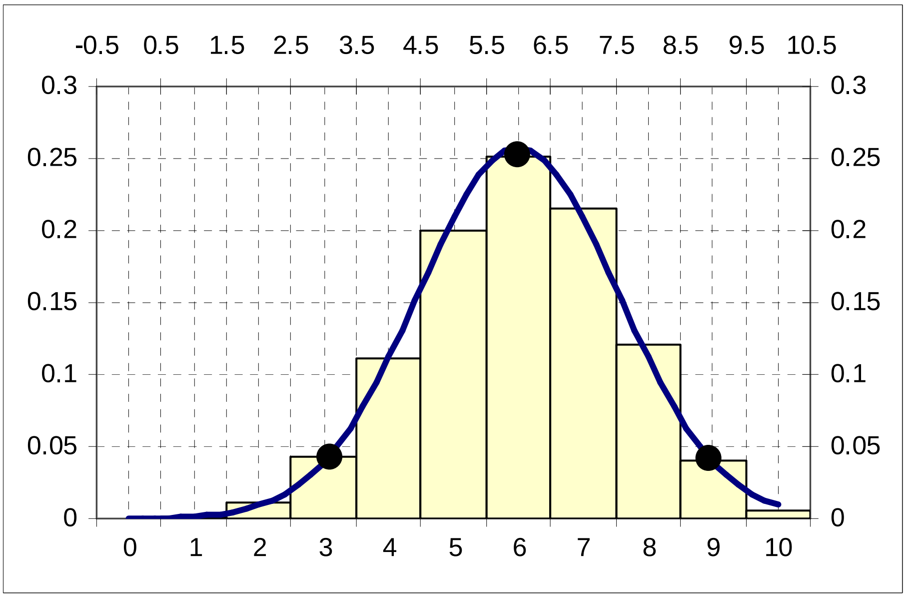
ii. (0.5 pt) Quelles sont les valeurs possibles de S: **S=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10**

iii. (3 pts) Quelles sont les probabilités que S soit égale à chacune de ses valeurs possibles (loi de S)? Représentez-les sur l'histogramme -

**avec p=0.6, q=0.4 et n=10: $P(S=k) = C(n,k)\, p^k (1-p)^{10-k}$**

dbinom(k , n , p)

| |
|---|
| $1.049 \cdot 10^{-4}$ |
| $1.573 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.011 |
| 0.042 |
| 0.111 |
| 0.201 |
| 0.251 |
| 0.215 |
| 0.121 |
| 0.04 |
| $6.047 \cdot 10^{-3}$ |



4. i (2 pts)  Donner l'espérance et la variance de S.

**Espérance: np = $10 \times 0.6 = 6$;      Variance: npq = $10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4$**

ii. (1 pt) Quelle serait une fonction continue qui approximerait grossièrement l'histogramme de 3iii - donnez  ses paramètres ?

Densité loi normale **dnorm(x,$\mu$, $\sigma$) =** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-0.5\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right]$

**avec  $\mu$=6,** $\sigma = \sqrt{2.4} = 1.55$

iii. (1.5 pts) Donnez les valeurs de cette fonction en 3, 6, 9 et tracez-là sur l'histogramme

**dnorm(3,$\mu$, $\sigma$)= dnorm(9,$\mu$, $\sigma$)=0.0395; dnorm(6,$\mu$, $\sigma$)=0.257;**

**Fonction en 3: _0.0395__6: __0.257   9:  __0.0395**

iv. (1 pt) Quelle serait une façon d'approximer la probabilité que S=3 ou S=4 (somme des aires des rectangles correspondant dans l'histogramme) à l'aide de cette fonction? Donnez juste l'idée - pas de calculs.

**Aire sous la densité entre 2.5 et 4.5. (on trouve 0.155 et proba exacte est aire des 2 rectangles =  0.042 + 0.111 = 0.153)**

**************************************

**Exercice 2**

La note  X à un examen est une variable aléatoire de moyenne 12 dont la densité est une courbe en cloche symétrique.

1. (2 pts) Quelle loi proposez-vous pour décrire X et quelle information manque pour compléter cette description?

**Loi normale de moyenne $\mu$=12; il manque l'info sur l'écart-type $\sigma$.**

2. Cinquante pourcent des notes sont entre 10 et 14. On veut utiliser cette information pour trouver le paramètre manquant de 1.
i. (1 pt) Utiliser le tableau des pnorm(a,1,0) en dernière page pour trouver la valeur a* telle que la variable aléatoire normale centrée réduite tombe entre 0 et a* avec probabilité 0.25.

**aire sous dnorm(x,0,1) entre 0 et a* est 0.25 veut dire que pnorm(a*,0,1)=0.75 (fonction de répartition en a* est 0.75).**
**=> on lit pnorm(0.67,0,1)=0.7486 et pnorm(0.68,0,1)=0.7517; donc une interpolation grossière donne a* au milieu de l'intervalle (0.67, 0.68) : a*=0.675 (valeur exacte est 0.6745).**

ii. (2 pts) Déduire de i le paramètre manquant:

**50% des notes entre 10 et 14 =>**
**avec moyenne en 12, par symétrie: $0.25=P(12 < N_{12,\sigma} < 14) = P[(12-12)/\sigma < N_{0,1} < (14-10)/\sigma)] = P[0 < N_{0,1} < 2/\sigma)]$ ;**
**donc par i) $2/\sigma$ doit être égal à 0.675 => $\sigma = 2/0.675 = 2.96$**

**Réponse: $\sigma = 2.96$**

3. i. (1 pt) Trouver la probabilité qu'une note soit plus grande que 9.

**$P(9 < N_{12,2.96}) = 1 - P(N_{12,2.96} < 9) =$**
**1 - pnorm([9-12]/2.96 , 0,1) =1 - pnorm(-1.01 , 0,1) =**
**pnorm(1.01 , 0,1) = 0.8438**

**Réponse: 0.8438**

ii. (1 pt) Trouver la probabilité qu'une note soit entre 9 et 13.

**pnorm([13-12]/2.96 , 0,1) - pnorm([9-12] /2.96 , 0,1) =**
**pnorm(0.34 , 0,1) - pnorm(-1.01 , 0,1) =**
**pnorm(0.34 , 0,1) - [1-pnorm(1.01 , 0,1)] = 0.6331 - 1 + 0.8438 = 0.4769.**

**Réponse: 0.4769**

**Tableau donnant la fonction de répartition pnorm(a,1,0) pour la loi normale centrée-réduite.**

$M =$

| 0 | 0 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.5 | 0.504 | 0.508 | 0.512 | 0.516 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.591 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.648 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.67 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.695 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.719 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.758 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.791 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.834 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.877 | 0.879 | 0.881 | 0.883 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.898 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.937 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.975 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.983 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.985 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.989 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.992 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.994 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.996 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.997 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.998 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.999 | 0.999 |