NOM, Prénom: ______________________________________

Exercice 1: ____/ 9 ; **Exercice 2:** ____/11; **TOTAL:** ________/ 20

Partiel : Introduction à la modélisation statistique - 29 avril 2006

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice autorisée. **Donnez vos réponses à la suite de chaque question,** ***aux endroits prévus.*** **Barème approximatif entre parenthèses*. Donner les résultats numériques avec 3 chiffres significatifs.***

****

Exercice 1

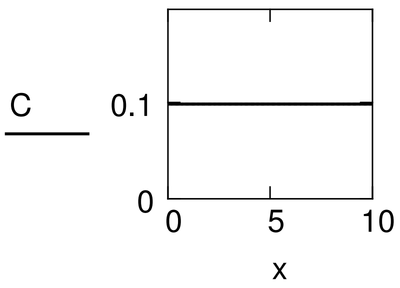
1. (1 pt) Rappeler les formules pour l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue X de densité f(x):

E(X) = $\int_0^\infty f(x)x.dx = \mu$

Var(X) = $\int_0^\infty f(x)(x-\mu)^2.dx = \int_0^\infty x^2 f(x)dx - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$

2. On considère la variable aléatoire X uniformément distribuée sur l'intervalle (0, 10), c'est-à-dire que la *densité* f(x) est une constante C sur (0, 10) et elle est nulle en dehors de cet intervalle.

i. (1 pt) Quelle est la valeur de C? _______**1/10** ______ii. (2 pts) Calculer E(X) et Var(X).



L'aire sous la fonction f(x)=C entre 0 et 10 doit être 1: 10C=1 => C=1/10.

E(X) = $\int_0^\infty f(x)x.dx = \int_0^{10} 0.1x.dx = 0.1\times\left[x^2/2\right]_0^{10} = 0.1\times 100/2 = 5$

Var(X) = $E(X^2)-\mu^2$ **=** $\int_0^{10} x^2.0.1dx - 5^2 =$

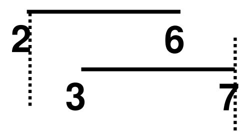
$$0.1\times\left[x^3/3\right]_0^{10} - 25 = 0.1\times 1000/3 - 25 = 25/3 = 8.333$$

3. (1 pt) Donner la fonction de répartition F(u) de X:

F(u)= P(X<u) = $\int_0^u f(x)dx = \int_0^u 0.1dx = 0.1\,u$ **pour u entre 0 et 10.**

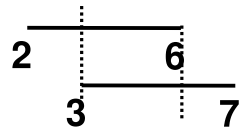
4. (3 pts) Exprimer à l'aide de F(u) (puis donner le résultat numérique) la probabilité que

i. 2<X <6: F(6) – F(2) = 0.1×6 - 0.1×2 = 0.4



ii. 2<X <6 ou 3<X<7: F(7)-F(2) = 0.1(7-2)=0.5

:



iii. 2<X <6 et 3<X<7: F(6)-F(3) = 0.1(6-3)=0.3

5. (1 pt) Comment peut-on utiliser la variable aléatoire uniforme r sur (0,1) obtenue avec la calculatric UPPA pour simuler X?

Il suffit de multiplier r entre 0 et 1 par 10 pour obtenir la variable aléatoire X=10r de densité 0.1 sur 10.

****

Exercice 2

La boule est un jeu de hasard similaire à la roulette. La roue compte neuf chiffres de 1 jusqu'à 9 et la boule a la même probabilité de tomber sur chaque chiffre. Le 5 joue le rôle du 0 à la roulette: lorsque la boule tombe sur le 5, le casino rafle les mises.

On parie sur les 4 chiffres pairs: 2, 4, 6, 8.

1. (1 pt) Quelle est la probabilité *p* de gains: **_p=4/9_____**

2. (1 pt) Si on parie 1 € sur les 4 chiffres pairs, on perd son euro si la boule tombe sur un nombre impair, et on gagne une quantité g si la boule tombe sur un chiffre pair.
i. Exprimer en fonction de g l'espérance du gain G à chaque jeu.

E(G) = p×g + (-1)(1-p) = (4g-5)/9

ii. (1 pt) Quelle doit être la valeur de g pour que le jeu soit équitable (espérance de gain nulle)?

(4g-5)/9 = 0 ⇒ g=5/4 = 1.25

g = 1.25

iii. (2 pts) Si g=1, quelle est l'espérance et la variance de G ?

$E(G) = (4-5)/9 = -1/9$; $Var(G) = E(G^2) - [E(G)]^2$

Les valeurs possibles de G^2 sont $(-1)^2$ (avec proba 5/9) et 1^2 avec proba 4/9, donc $E(G^2) = (-1)^2\ 5/9 + 1\times4/9 = 1$. Donc

$Var(G) = 1 - (1/9)^2 = 80/81 = 0.988$

3. (2 pts) Dans ce qui suit on suppose que g=1, ce qui est le cas au casino. On joue n fois et on appelle Gm la moyenne $Gm=\Sigma\, G_k/n$ des gains G_1 , G_2 , ..., G_n sur les n jeux .
i. Donner l'espérance μ_m et l'écart-type σ_m de Gm. (Au besoin on donnera les réponses en fonction de n).

$\mu_m = E[\Sigma\, G_k/n\,] = nE(G)/n = -1/9$

$Var(\Sigma\, G_k/n\,) = nVar(G)/n^2 = Var(G)/n = (80/81)/n$

$\Rightarrow \sigma_m$ = racine carrée de la variance = $\sqrt{\dfrac{80/81}{n}} = \dfrac{0.994}{\sqrt{n}}$

2. i. (3 pts) Simuler 3 jeux à l'aide des 3 nombres aléatoires uniformément distribués entre 0 et 1: 0.12, 0.89, 0.45. Expliquez la méthode que vous utilisez.

Gain +1 avec proba 4/9=0.444 et -1 avec proba 0.556. Donc on décide que si le nombre aléatoire r tombe en dessous de 0.444 on gagne, autrement on perd.
r=0.12 $\Rightarrow$ gain +1; r=0.89 et 0.45 $\Rightarrow$ gain = -1

Gain jeu 1: +1 Gain jeu 2: -1 Gain jeu 3: -1

Gain moyen sur les 3 jeux: (+1 - 1 -1)/3 = -1/3

[On aurait pu associer un intervalle de longueur 1/9 à chaque valeur possible de la boule, mais cela était inutile car on s'intéresse seulement à deux événements: gain (prob 0.444) et perte (proba = 0.556).]

ii. (1 pt) Quelle serait approximativement la valeur de ce gain moyen si on joue 10000 fois au lieu de 3?

$\Sigma \mathbf{G_k/n} \approx \mu_m = -1/9$ pour n grand

Réponse: -1/9