

NOM, Prénom: _____

Exercice 1: ____ / 10 ; **Exercice 2:** ____ / 10; **TOTAL:** _____ / 20

Partiel : Introduction à la modélisation statistique
29 avril 2007

Aucun document n'est autorisé. Calculatrice autorisée. Donnez vos réponses à la suite de chaque question, aux endroits prévus. Barème approximatif entre parenthèses. Donner les résultats numériques avec 3 chiffres significatifs.

Exercice 1

On a un dé à six faces numérotées -3, -2, -1, 0, 1, 2. Les probabilités que le dé tombe sur chacun des cinq premiers chiffres sont respectivement 0.10, 0.12, 0.08, 0.30, 0.22.

1. (1 pt) Quelle est la probabilité que le dé tombe sur le sixième chiffre (chiffre 2) ?

La somme des probas est 1, donc la proba recherchée est

1 - (0.10 + 0.12 + 0.08 + 0.30 + 0.22) = 0.18.

Réponse: 0.18

1. (1 pt) Rappeler les formules pour l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète X :

si x_k et p_k sont les valeurs possibles de la v.a. et les probas correspondantes:

$$\mathbf{E(X) = \sum x_k p_k}$$

$$\mathbf{Var(X) = \sum [x_k - E(X)]^2 p_k = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

2. (2 pts) On appelle X le chiffre obtenu quand on jette le dé en l'air. Calculer E(X) et Var(X).

$$E(X) = \sum_{k=1}^6 p_k \cdot (k-4) =$$

$$0.10(-3) + 0.12(-2) + 0.08(-1) + 0.30(0) + 0.22(1) + 0.18(2) = -0.04$$

$$Var(X) = \sum_{k=1}^6 p_k \cdot [(k-4) - E(X)]^2 =$$

$$\sum_{k=1}^6 p_k \cdot (k-4)^2 - E(X)^2 = 2.398$$

3. (1 pt) Comment pouvez-vous simuler le jet du dé à l'aide de la calculatrice de l'UPPA?

r nombre aléatoire entre 0 et 1; on dit :

si $0 < r \leq 0.1$ (proba=0.10) alors jet = -3

si $0.1 < r \leq 0.22$ (proba=0.12) alors jet = -2

si $0.22 < r \leq 0.30$ (proba=0.08) alors jet = -1

si $0.30 < r \leq 0.60$ (proba=0.30) alors jet = 0

si $0.60 < r \leq 0.82$ (proba=0.22) alors jet = 1

si $0.82 < r \leq 1.00$ (proba=0.18) alors jet = 2

4. Utilisez les nombres aléatoires 0.12, 0.08, 0.45, 0.33, 0.40 pour simuler 5 jets du dé.

i. (2 pts) Resultats:

1er jet: -2 2ème jet: -3 3ème jet: 0 4ème jet: 0 5ème jet: 0

Moyenne sur les 5 jets: $\frac{-2 -3 + 0 + 0 + 0}{5} = -1$

ii. (1 pt) Vers quelle valeur tendrait cette moyenne si vous jouez un grand nombre de fois?

Réponse: - 0.04 (espérance du gain)

5. (1 pt) Si on vous propose de jouer à un jeu de hasard qui consiste à jeter ce dé, et à gagner (ou perdre si le signe est négatif) une somme égale au chiffre obtenu, choisissez-vous de jouer?

OUI **NON** (entourez la bonne réponse)

Explication: à chaque jeu on perd en moyenne 0.04

6. (1 pt) Si vous jouez 100 fois, quel serait approximativement le bilan, sur l'ensemble des

100 jeux: $100(-0.04) = -4$ euros

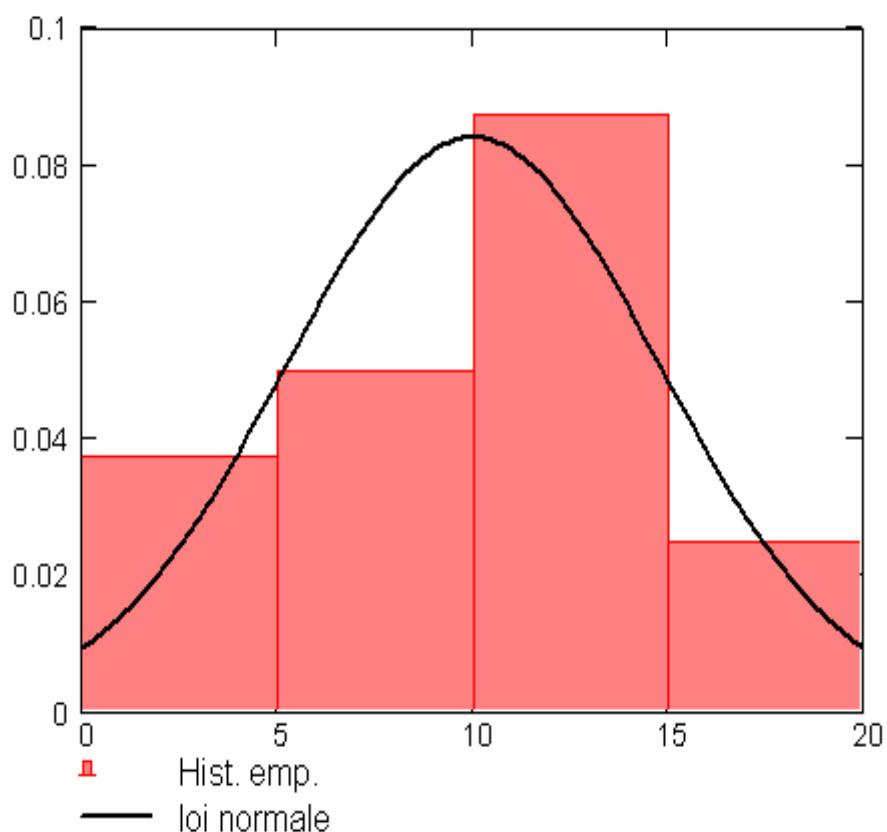
Exercice 2

On rappelle la formule utilisée dans le cours pour estimer la variance des tailles TF des femmes:

$$\frac{\sum_k (TF_k)^2}{n_f - 1} - \frac{n_f}{n_f - 1} \cdot (\mu_{fe})^2$$

Les notes d'un examen sont des réalisations X_1, X_2, \dots, X_n d'une même variable aléatoire X (n étudiants); 6 étudiants ont une note entre 0 et 5; 8 entre 5 et 10, 14 entre 10 et 15 et 4 entre 15 et 20.

1. (3 pts) Faites les calculs à droite puis tracez l'histogramme (d'aire totale 1) qui décrit ces données.



32 notes. 6 notes entre 0 et 5 veut dire une proportion $6/32 = 0.1875$ dans cet interval. Il faut diviser par 5 pour que la somme des aires de chaque rectangle soit 1: donc entre 0 et 5 la hauteur est $6/32/5 = 0.0375$.
 de 5 à 10: $8/32/5 = 0.05$
 de 10 à 15: $14/32/5 = 0.0875$
 de 15 à 20: $4/32/5 = 0.025$

2. (2 pts) Calculez du mieux que vous pouvez les valeurs estimées μ_e et σ_e de la moyenne et de l'écart-type μ_e et σ_e des 32 observations.

Quelle hypothèse faites-vous: **Comme dans les TD on suppose que toutes les notes dans un intervalle sont égales à la valeur du milieu de l'intervalle: 6 notes égales à 2.5; 8 notes égales à 7.5; 14 notes égales à 12.5; 4 notes égales à 17.5;**

alors $\mu_e = [6 \times 2.5 + 8 \times 7.5 + 14 \times 12.5 + 4 \times 17.5] / 32 = 10$

Somme des carrés = $6 \times 2.5^2 + 8 \times 7.5^2 + 14 \times 12.5^2 + 4 \times 17.5^2 = 3900$

La formule rappelée au début donne

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3900}{31} - \frac{32 \times 10^2}{31}} = 4.752$$

$\mu_e = \underline{\quad 10 \quad}$ $\sigma_e = \underline{\quad 4.752 \quad}$

3. (1 pt) Quelles valeurs prendra-t-on pour les paramètres de la loi normale \mathcal{N} qui approximera la distribution de ces notes ?

Les valeurs estimées ci-dessus :

Réponse: $\mu_e = 10$ $\sigma_e = 4.752$

Densité: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e}} \exp\left(-0.5 \left[\frac{x - \mu_e}{\sigma_e}\right]^2\right)$

4. (1.5 pts) Donnez les valeurs de cette densité en 0, 10, et 20:

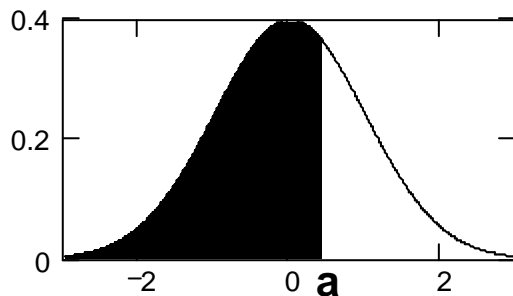
$$f(0)=f(20) = \frac{\exp\left(-0.5 \left[\frac{-10}{4.752}\right]^2\right)}{\sqrt{2\pi} \times 4.752} = \mathbf{0.00917}; \quad f(10) = \frac{\exp\left(-0.5 \left[\frac{0}{4.7552}\right]^2\right)}{\sqrt{2\pi} \times 4.752} = \mathbf{0.084}$$

Densité en 0: **0.00917** _ Densité en 10= **0.084**: Densité en 20: **0.00917**

5. (1 pt) Tracez cette densité sur le graphe.

6. (1.5 pts) Utilisez le tableau des valeurs de la fonction de répartition de $\mathcal{N}_{0,1}$ donné en dernière page pour calculer d'après le modèle obtenu avec la loi normale, la probabilité qu'une note X soit:

i. plus grande que 12:



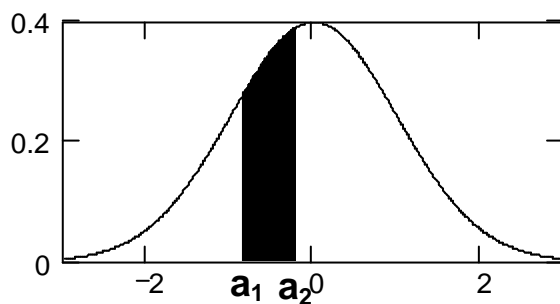
$$a = (12 - 10) / 4.752 = 0.42$$

Proba recherchée est

$$P(\mathcal{N}_{0,1} > 0.42) = 1 - \text{pnorm}(0.42) = 1 - 0.6628 = 0.3372$$

Réponse: **0.3372**

ii. entre 6 et 9:



$$a_1 = (6 - 10) / 4.752 = -0.842;$$

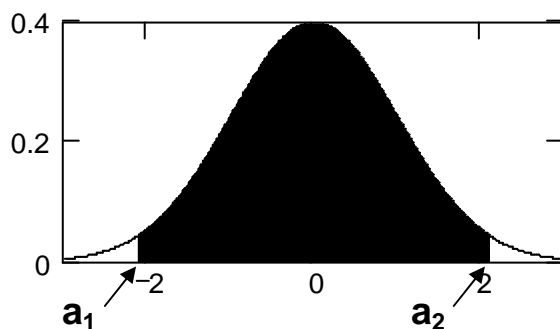
$$a_2 = (9 - 10) / 4.752 = -0.210$$

Proba recherchée est

$$P(-0.842 < \mathcal{N}_{0,1} < -0.210) = \text{pnorm}(0.84) - \text{pnorm}(0.210) = 0.7995 - 0.5832 = 0.2163$$

Réponse: **0.2163**

ii. entre 0 et 20:



$$a_1 = (0 - 10) / 4.752 = -2.1;$$

$$a_2 = (20 - 10) / 4.752 = 2.1$$

Proba recherchée est

$$P(-2.1 < \mathcal{N}_{0,1} < 2.1) = 1 - 2(1 - \text{pnorm}(2.10)) = 1 - 2(1 - 0.9821) = 0.96$$

Réponse: **0.96** ; le modèle est théorique et ne rend pas compte du fait que les notes sont nécessairement entre 0 et 20.

Tableau donnant la fonction de répartition $\text{pnorm}(a,1,0)$ pour la loi normale centrée-réduite.

M =

0	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.591	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.695	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.834	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.879	0.881	0.883
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.898	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.937	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.975	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.983	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.985	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.989
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.994	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.996	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.998	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.999	0.999