EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

CPI2 - 2007-2008
Bernard - Paul
Ranisavljevic - Elisabeth

Séries entières et résolution d'équations différentielles
à l'aide des séries entières : applications à la physique.

1 Séries Entières

L'utilité des séries entières est de résoudre des équations différentielles à l'aide de celles-ci, si cela est possible.

1.1 Notion de série entière

Définition : On appelle *série entière* toute série d'applications $\sum_{n\geq 0}(f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$ telle qu'il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f_n(z) = a_n z^n}$$

Soit une application f, on cherche une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ telle que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, avec $z \in \mathbb{C}$, sous réserve de convergence.

1.2 Rayon de convergence

Proposition (Lemme d'Abel) : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, $(z, Z) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z| < |Z|$. Si la suite $(a_n Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Théorème : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. $\exists! R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \begin{cases} |z| < R & \Rightarrow \quad \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R & \Rightarrow \quad (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée} \end{cases}}$$

Cet élément $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Définition : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. On appelle *somme* de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ l'application $S : z \in \mathbb{C}; |z| < R \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\boxed{S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}$$

1.3 Règle de d'Alembert

Proposition : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} \forall n \geq \mathbb{N} \quad a_n \neq 0 \\ \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\geq N} \quad \textit{admet une limite } l \textit{ dans } \overline{\mathbb{R}}_+ \end{cases}}$$

alors le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est :

$$\boxed{R = \frac{1}{l}}$$

1.4 Règle de Cauchy

Proposition : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls tels que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l}$$

R désigne le rayon de convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

$$\boxed{\begin{cases} si\ l = 0 \quad R = +\infty \\ si\ l \neq 0 \quad R = \frac{1}{l} \end{cases}}$$

Remarque : Attention à l'application de ces règles dans le cas où $a_n z^n$ dépend de la parité de n.

1.5 Opérations sur les séries entières

1.5.1 Structure vectorielle

Les séries entières, ainsi que leurs rayons et leurs sommes, sont stables par le produit par un scalaire non nul, et par la somme.

Attention : Le rayon de la somme de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des rayons de chaque série.

1.5.2 Dérivation

Définition : On appelle *série entière dérivée* d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ ou encore $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Proposition : La série entière dérivée d'une série entière a le même rayon de convergence que celle-ci.

1.6 Développement en série entière

Définition : 1) Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(0)$[1], $f \in \mathbb{C}^V$. On dit que f est *développable en série entière centrée en 0* (en abrégé dSE(0)) si et seulement s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence noté R et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(0)$ tels que :

$$\boxed{\begin{cases} R > 0 \\ \forall z \in U \cap V \cap]-R, R[\quad f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}}$$

2) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z_0)$, $f \in \mathbb{C}^V$. On dit que f est *développable en série entière centrée en* z_0 (en abrégé dSE(z_0)) si et seulement s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence noté R et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z_0)$ tels que :

$$\boxed{\begin{cases} R > 0 \\ \forall z \in U \cap V \cap]z_0 - R, z_0 + R[\quad f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \end{cases}}$$

Proposition : (Unicité du développement en série entière) : Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z_0)$, $f \in \mathbb{C}^V$, dSE(z_0) , $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{C}}(z_0)$ tels que :

$$\boxed{\forall z \in U \cap V \cap]z_0 - R, z_0 + R[\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U \cap V \cap]z_0 - R, z_0 + R[$ et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}$$

1.7 Développements en série entière usuels

Voir Tab.1 - Tableau des dSE(0) usuels.

2 Résolution d'équation différentielle

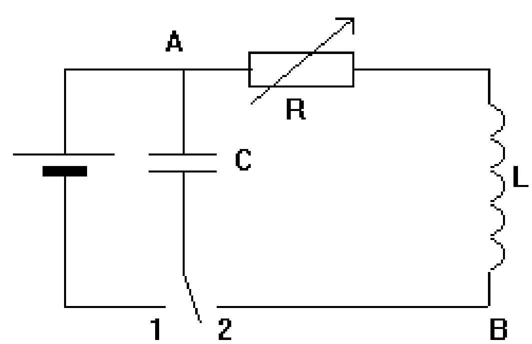
Nous allons illustrer la résolution par une application à la physique.

Énoncé :

Cet exercice introduit les oscillations électriques libres amorties et non amorties d'un dipôle RLC.

Une première approche du phénomène est réalisée en observant sur l'écran d'un oscilloscope à mémoire la tension $u_{AB}(t)$ aux bornes du condensateur que l'on "décharge" dans une portion de circuit R, L selon le montage ci-contre.

En faisant varier R, on observe les différentes allures du graphe de la tension $u_{AB}(t)$. On mesure la pseudo-période des oscillations obtenues pour de faibles valeurs de R.



[1]Disque centré en 0

On établit l'équation différentielle :

$$(E) : \frac{d^2}{dt^2}u_{AB} + \frac{R}{L}\frac{d}{dt}u_{AB} + \frac{1}{LC}u_{AB} = 0$$

On cherche la solution de la forme : $u_{AB}(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$

On a :

$$\begin{cases} u_{AB}(t) & = & \sum_{n\geq 0} a_n t^n \\ \frac{d}{dt}u_{AB}(t) & = & \sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} \\ \frac{d^2}{dt^2}u_{AB}(t) & = & \sum_{n\geq 2}(n-1)n a_n t^{n-2} \end{cases}$$

Établissons une relation de récurrence sur les a_n :

$$\begin{aligned} (E) : \quad & \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 2}(n-1)n a_n t^{n-2} + \frac{R}{L}\sum_{n\geq 1} n a_n t^{n-1} + \frac{1}{LC}\sum_{n\geq 0} a_n t^n = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \frac{R}{L}\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}t^n + \frac{1}{LC}\sum_{n\geq 0} a_n t^n = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} t^n \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \frac{R}{L}(n+1)a_{n+1} + \frac{1}{LC}a_n\right] = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + \frac{R}{L}(n+1)a_{n+1} + \frac{1}{LC}a_n = 0 \quad car\ t > 0 \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le cas où l'amortissement est nul c'est-à-dire : $\frac{R}{L} = 0$.

On suppose que la tension u_{AB} est nulle à $t = 0$, ce qui implique que $a_0 = 0$.

$$\Rightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{1}{LC}\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$a_n \Rightarrow \begin{cases} a_{2p} & = & \left(\frac{-1}{LC}\right)^p \frac{1}{(2p)!}a_0 \\ a_{2p+1} & = & \left(\frac{-1}{LC}\right)^p \frac{1}{(2p+1)!}a_1 \end{cases}$$

Puisque $a_0 = 0$, alors $a_{2p} = 0$ et $a_n = a_{2p+1}$.

D'où :

$$\begin{aligned} u_{AB}(t) & = \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p}{(LC)^p(2p+1)!}t^{2p+1}a_1 \\ & = \sum_{p\geq 0} \frac{\sqrt{LC}(-1)^p}{(\sqrt{LC})^{2p+1}(2p+1)!}t^{2p+1}a_1 \\ & = \sqrt{LC}\ a_1 \sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p \left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ & = \sqrt{LC}\ a_1 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \end{aligned}$$

On arrive donc à des oscillations non amorties.

Formule	Rayon	Domaine de validité
$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$	∞	$\mathbb{R}$
$ch(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$sh(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$cos(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$sin(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$	∞	$\mathbb{R}$
$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} z^k$	1 ou ∞ si $\alpha \in \mathbb{N}$	$]-1,1[$ ou $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^k$	1	$]-1,1[$
$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$	1	$]-1,1[$
$ln(1+z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k$	1	$]-1,1]$
$-ln(1-z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$	1	$[-1,1[$
$arctan(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1}$	1	$[-1,1]$
$argth(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$	1	$]-1,1[$
$arcsin(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)}$	1	$[-1,1]$
$argsh(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)}$	1	$[-1,1]$

Tab. 1 – Tableau des dSE(0) usuels