Série 2

Variables aléatoires

Exercice 1

On jette trois pièces de monnaie équilibrées et on suppose qu'aucune d'entre elles ne tombe sur la tranche. On désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de côtés « pile » obtenus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Déterminer sa fonction de répartition F_X puis la représenter graphiquement.

Exercice 2

La fonction de répartition F_Y d'une variable aléatoire Y est donnée par :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ \frac{y}{2} \text{ si } 0 \leq y < 1 \\ \frac{2}{3} \text{ si } 1 \leq y < 2 \\ \frac{11}{12} \text{ si } 2 \leq y < 3 \\ 1 \text{ si } y \geq 3 \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement F_Y.
2) Calculer :
   a) $p(Y < 3)$
   b) $p\left(Y > \frac{1}{2}\right)$
   c) $p(Y = 1)$
   d) $p(2 < Y \leq 3)$

Exercice 3

Soient X une variable aléatoire et Y = 5X + 3, une transformation linéaire de X.

1) Exprimer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X.
2) Exprimer E(Y) et V(Y) en fonction de E(X) et de V(X).
3) Calculer la covariance de X et Y ainsi que la variance de Y – X.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x\in\left]-\infty,0\right]\cup\left]3,+\infty\right[\\ \dfrac{x}{2} \text{ si } x\in\left]0,1\right] \\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x\in\left]1,2\right] \\ \dfrac{3-x}{2} \text{ si } x\in\left]2,3\right] \end{cases}$

1) Vérifier que f peut être la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2) Tracer la représentation graphique de f.
3) Déduire de la représentation graphique de f sans faire de calcul, E(X).
4) Retrouver E(X) par le calcul puis déterminer V(X).
5) Calculer les probabilités suivantes :
   a) $p(X\le 0)$
   b) $p(X=1)$
   c) $p(0\le X\le 10)$
   d) $p(1\le X\le 2,5)$

Exercice 5

Soit T le temps en années que vit un poisson d'une certaine espèce. On suppose que la fonction de répartition F_T de T est donnée par : $F_T(t)=\begin{cases} 0 \quad \text{si } t<0 \\ \left(\dfrac{t}{10}\right)^2 \quad \text{si } 0\le t\le 10 \\ 1 \quad \text{si } t>10 \end{cases}$

1) Déterminer la fonction de densité de probabilité de T.
2) Avec quelle probabilité le poisson va-t-il mourir entre trois et quatre ans ?
3) Quelle est la probabilité que le poisson atteigne l'âge de huit ans ?

Exercice 6

La durée de vie d'un appareil est une variable aléatoire Y mesurée en années dont la fonction de densité de probabilité f est donnée par : $f(t)=\begin{cases} c\,t\,e^{-t} \quad \text{si } t>0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$ où c est une constante réelle.

1) Calculer la valeur de la constante c.
2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.
3) Donner la fonction de répartition F_Y de Y.
4) Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne au moins une année ?
5) Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne moins de quatre ans sachant qu'il a déjà fonctionné un an ?
6) Soit Z la variable aléatoire définie par Z = $\sqrt{Y}$. Donner la fonction de densité de probabilité de Z.

Exercice 7 : Problème de vieillissement
La durée de vie X exprimée en heures, d'un certain type d'ampoules électriques admet pour fonction de densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ où λ est une constante réelle strictement positive.

On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
2) Comparer $p(X\geq t)$ et $p_{X\geq s}(X\geq s+t)$ pour tout s > 0 et tout t > 0. (On dit que X est une loi sans mémoire)

Exercice 8
Supposons qu'un guichetier de La Poste sert en moyenne deux clients par période de cinq minutes. Soient X_1 et X_2 le temps d'arrivée de chacun. On suppose que ces temps sont indépendants et sont identiquement distribués suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
(c-f exercice 7).
On pose T = $X_1 + X_2$.
Calculer l'espérance mathématique et la variance de T.

Exercice 9
Soit X une variable aléatoire admettant pour fonction de densité de probabilité la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{x} & \text{si } x\in[1,e]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ où k est une constante réelle.

1) Calculer la valeur de la constante k
2) Calculer $E\left(X^n\right)$ pour tout entier n strictement positif. En déduire E(X) et V(X).
3) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
4) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire Y = lnX.

Exercice 10
Soient X une variable aléatoire admettant pour fonction de densité de probabilité la fonction f et a un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire Y = aX admet pour fonction de densité de probabilité la fonction g définie par g(x) = $\dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Exercice 11

1) Pour quelle valeur de la constante réelle C la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = $\dfrac{C}{1+x^2}$ est-elle une fonction de densité de probabilité ?
2) On considère une variable aléatoire X admettant pour fonction de densité de probabilité la fonction f de la question précédente. On dit alors que X suit une loi de Cauchy.
   a) Pour quelles valeurs du réel α, $E\left(|X|^{\alpha}\right)$ est-elle finie ?
   b) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

Exercice 12

On sait que le temps de survie (en jours) d'une savonnette est une variable aléatoire T admettant fonction de densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \lambda^2 t \ e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$ où λ est une constante réelle strictement positive.

Une longue expérience indique que l'espérance mathématique E(T) est de 20 jours.

1) Calculer la valeur de λ et déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
2) Calculer la probabilité pour que la savonnette dure plus de 30 jours sachant qu'elle est toujours là au bout de 10 jours.

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire telle que pour tout k entier naturel non nul on a :

$p(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ avec $p \in \,]0,1]$.

Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.