



Série 3

Loi normale

Exercice 1

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Calculer :

$$p(T \leq 0) ; p(T \leq 2.04) ; p(T \leq -1.95) ; p(0 \leq T \leq 2) ; p(-1 \leq T \leq 2) ; p(-3 \leq T \leq -1) ;$$

$$p(T > 2.21) ; p(T > -2) ; p(|T| \leq 2) ; p(|T| > 1) ; p_{T>2}(T > 2.73) ; p_{T \leq 2.73}(T \leq 2) ;$$

$$p_{T>1}(T \leq 2)$$

Exercice 2

Soit T une variable normale centrée réduite. Déterminer le réel t dans chacun des cas

suivants :

$$p(T \leq t) = 0.8238 ; p(T \leq t) = 0.1112 ; p(0 \leq T \leq t) = 0.4878 ; p(t \leq T \leq 1) = 0.6826 ;$$

$$p(|T| \leq t) = 0.95.$$

Exercice 3

On suppose que les dépôts mensuels dans une agence bancaire suivent une loi normale de moyenne 90 000 € et d'écart-type 1 500 €.

Calculer la probabilité pour que les dépôts d'un mois soient :

- inférieurs à 90 000 € ;
- inférieurs à 92 000 € ;
- compris entre 88 500 € et 91 500 € ;
- compris entre 89 800 € et 90 500 €.

Exercice 4

Les portes d'une maison ont une hauteur standard de 2.02 m. Quelle est la proportion d'individus susceptibles de s'y cogner la tête dans une population dont la taille est normalement distribuée avec une moyenne de 1.70 m et un écart-type de 10 cm ?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres inconnus.

Calculer l'espérance mathématique μ et la variance σ^2 de X sachant que :

$$p(X \leq 34) = 0.9772 ; p(X \leq 29.5) = 0.1587.$$

Exercice 6

Les revenus mensuels des familles d'un quartier suivent une loi normale de moyenne 22 000 € et d'écart-type 460 €.

Donner un intervalle de centre 22 000 dans lequel se trouveront les revenus avec une probabilité de 97 %.

Exercice 7

En une minute, une machine fabrique trois pièces. Pendant un réglage, elle est arrêtée. En admettant que la durée en minutes d'un réglage suit une loi normale de moyenne 20 minutes et d'écart-type 3 minutes,

- a) Quel est le nombre moyen de pièces non fabriquées à cause du réglage ?
- b) Quelle est la probabilité que le réglage entraîne une perte supérieure à 78 pièces ?

Exercice 8

Un candidat passant un examen est ajourné si sa note est inférieure à 7, passe un oral si sa note est comprise entre 7 et 12, est admis sans oral si sa note est supérieure à 12. On suppose que les notes suivent une loi normale de paramètres μ et σ .

1) On suppose $\mu = 9$ et $\sigma = 3$.

- a) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit ajourné.
- b) Calculer la probabilité pour qu'un candidat passe l'oral.
- c) Calculer la probabilité pour qu'un candidat soit admis sans oral.
- d) Déterminer l'intervalle de centre μ qui contient 96 % des notes.

2) On suppose μ et σ inconnus. On souhaite admettre (sans oral) 15,87 % des candidats et ajourner 6,68 % des candidats.

- a) Calculer la probabilité pour qu'un candidat passe l'oral.
- b) Déterminer les valeurs de μ et σ .
- c) Calculer la probabilité pour qu'un candidat ait plus de 15.

Exercice 9 (UPPA)

Une compagnie fabrique des batteries de voiture qui ont une durée de vie qui suit une loi normale de moyenne 3 ans et d'écart-type 4 mois.

Pour quelle durée D doit-on garantir les batteries si on ne veut en remplacer que 3 % ?

Exercice 10 (UPPA)

La durée D de la grossesse est une variable aléatoire normalement distribuée de moyenne 268 jours et d'écart-type 15 jours. On admet une grossesse qui se passe « sans problème » arrive à son terme au bout de 275 jours.

- 1) Quelle est la probabilité que cette durée dépasse la moyenne d'au moins une semaine ?
- 2) Quelle est la probabilité que la naissance ait lieu à moins d'une semaine de la date prévue ?
- 3) Quelle est la probabilité que la naissance ait lieu à plus de 15 jours de la date prévue ?

Exercice 10 (UPPA) suite.

Le poids P en kilogrammes d'un nouveau né est approximé très grossièrement par la fonction $P = (D - 268) \cdot 0.08 + 3$.

- 4) Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né pèse plus de 3.5 kg ?
- 5) Quel est le taux de mortalité dû à la prématurité sachant qu'un nouveau-né de moins de 0.5 kg ne survit pas ?

Exercice 11 (UPPA)

Chaque note du contrôle Grands Défis de l'automne 2005 pour les étudiants de première année en physique-chimie-maths-info peut être considérée comme une variable aléatoire X_P .

On ne vous donne pas toutes les notes, individuellement, seulement un vecteur P_1 de dimension 8 contenant les nombres d'étudiants ayant une note dans chacun des intervalles $(0 - 2.5)$, $(2.5 - 5)$, $(5 - 7.5)$, ..., $(17.5 - 20)$: $P_1^T = (0 \ 0 \ 1 \ 8 \ 34 \ 42 \ 41 \ 13)$. (par exemple, il y a 8 étudiants qui ont eu entre 7.5 et 10.

Le même vecteur résumé V_1 des notes X_V des étudiants de SDV-SDT est

$$V_1^T = (1 \ 1 \ 8 \ 15 \ 34 \ 33 \ 11 \ 0)$$

- a) Faites deux histogrammes (d'aire totale 1) pour décrire les données.
- b) Le but est d'estimer comme dans le cours les paramètres μ et σ des lois normales qui approximent ces distributions. Avec les seules données agrégées, approximez du mieux que vous pouvez les sommes $SP = \sum X_P$ et $SV = \sum X_V$ des notes, ainsi que les sommes des carrés $S2P = \sum (X_P)^2$ et $S2V = \sum (X_V)^2$ (On supposera que toutes les notes dans un intervalle donné sont égales à la note du milieu de l'intervalle.)
- c) Rappelez les formules pour les estimateurs μ_e et σ_e , de μ et σ - et utilisez-les avec les valeurs exactes des sommes que l'on vous donne maintenant : $SP = 1932.778$, $SV = 1185.556$, $S2P = 27914.506$ et $S2V = 14534.568$
- d) Tracez sur les histogrammes de a) la densité normale correspondant aux μ_e et σ_e qui viennent d'être trouvés. Pour cela, trouvez la valeur maximum de cette densité – celle-ci est particulièrement facile à calculer. Puis calculez cette densité en deux valeurs à droite de ce maximum – Vous pourrez alors tracer la densité normale en 5 points (pourquoi 5 ?).
- e) On considère maintenant que les variables aléatoires X_P et X_V sont normalement distribuées avec des espérances μ et des écarts-type σ donnés par les valeurs estimées μ_e et σ_e . Trouvez la probabilité qu'un étudiant ait une note > 10 , une note comprise entre 8 et 13.

Exercice 12 (UPPA)

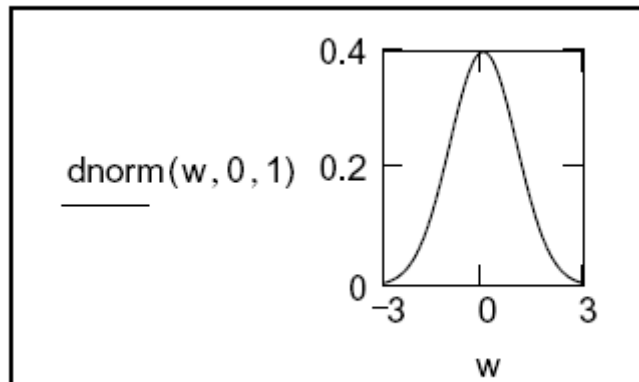
On rappelle que la fonction interne $\text{dnorm}(x, \mu, \sigma)$ du logiciel MathCad est la densité

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-0.5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ de la v.a. normale $N_{\mu, \sigma}$. Dans ce qui suit on admettra le résultat

d'analyse $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-0.5w^2) dw = 1$ qui dit qu'on a bien une aire de 1 sous la densité

$\text{dnorm}(x, 0, 1)$ de la v.a. normale centrée-réduite $N_{0,1}$.

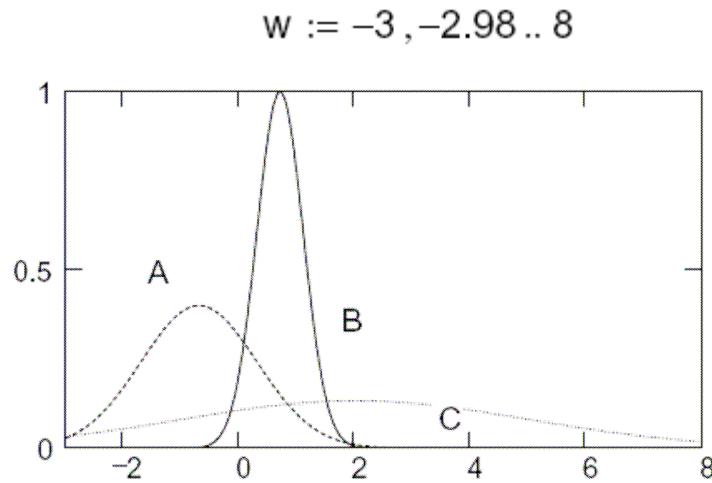
$$w := -3, -2.98 .. 8$$



- Vérifiez par le changement de variable $w = \frac{x-\mu}{\sigma}$ que l'aire $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{dnorm}(x, \mu, \sigma) dx$ vaut bien 1 pour tout μ et $\sigma > 0$.
- Utilisez le même changement de variable pour calculer l'espérance de $N_{\mu, \sigma}$.
- Calculez la variance de $N_{\mu, \sigma}$. Pour cela, il faudra, après avoir fait le même changement de variable, intégrer une expression du type $w^2 \cdot \text{dnorm}(x, 0, 1)$ que l'on écrira comme le produit $w (w \text{dnorm}(x, 0, 1))$ avant de l'intégrer par parties.

Exercice 13 (UPPA)

- 1) Pour les trois densités normales ci-dessous (correspondant à trois v.a. A, B, C) donnez les valeurs approximatives de μ et de σ (tuyau pour σ : raisonner sur la valeur maximum de la densité).



- 2) Donnez très grossièrement et à vue d'œil les probabilités que chacune des variables soit plus grande que -1 ; que chacune soit plus petite que 1 ; que les trois soient plus grandes que -1 ; que les trois soient plus petites que 1 .

Exercice 14 (UPPA)

- 1) Trouvez la probabilité que la v.a. $N_{0,1}$ tombe entre -1 et 1 ; entre -2 et 2 ; entre -3 et 3 .
- 2) En déduire que la probabilité qu'une v.a. normale $N_{\mu,\sigma}$ quelconque tombe entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$ est une constante universelle que l'on donnera. Même question pour $N_{\mu,\sigma}$ tombe entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$ et tombe entre $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$.
- 3) Montrez que les points d'inflexion de la densité de $N_{\mu,\sigma}$ se trouvent entre $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$.
- 4) Utilisez ces remarques pour estimer les trois écart-types correspondant aux variables A, B, C de l'exercice 13.